Calculus I, **22/10/2010**

Reeksnr.:
Naam:

1. Beschouw de kromme gegeven door

$$5\,x^2 - 6\,x\,y + 5\,y^2 - 12\sqrt{2}\,x + 20\sqrt{2}\,y + 32 = 0$$

   (a) Bereken de helling van deze kromme in een gegeven punt (x, y) op deze kromme.

   (b) Bepaal vervolgens de vergelijking van (1) de raaklijn aan, en van (2) de normaal op deze kromme in het punt $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(2 ptn)

Antwoord:

(a) Via impliciete differentiatie komen we tot:

$$10\,x - 6\,y - 6\,x\,y' + 10\,y\,y' - 12\sqrt{2} + 20\sqrt{2}\,y' = 0$$

waaruit we halen dat

$$y' = \frac{6\,y - 10\,x + 12\sqrt{2}}{-6\,x + 10\,y + 20\sqrt{2}}$$

(b) De helling in $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ wordt dan via bovenstaande formule

$$y'(x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}) = -1$$

De vergelijking van de raaklijn is dan

$$y = -1(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}$$

of dus

$$y = -x$$

De vergelijking van de normaal (die heeft richtingscoëfficiënt $+1$) is dan

$$y = (x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}$$

of dus

$$y = x - 2\sqrt{2}$$

2. Beschouw de reële functie f van de reële veranderlijke t gegeven door

$$f(t) = \csc\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\left(\frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi}{2} + 3\right)}{3-t} + \frac{\left(\frac{\pi^2}{48}\right)}{t} - 1}$$

(a) Bepaal het domein van $f(t)$.

(b) Bereken de linkerlimiet

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-} f(t)$$

(2 ptn)

Antwoord:

(a) We herwerken eerst het functievoorschrift tot

$$f(t) = \frac{1}{\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi}{2} + 3\right)t + \left(\frac{\pi^2}{48}\right)(3-t) - t(3-t)}{t(3-t)}}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{t^2 - \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{16}}{t(3-t)}}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^2}{t(3-t)}}$$

Het domein van deze functie sluit via de deling door de sinusfunctie alle punten uit die te schrijven zijn als

$$3t + \frac{\pi}{4} = n\,\pi \qquad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Verder moet de uitdrukking onder de wortel positief zijn. Het teken van die uitdrukking wordt bepaald door de factor $t(3-t)$ in de noemer van de breuk. De uitdrukking onder de wortel is strikt positief (> 0) voor $t \in]0, 3[$ (open interval, eindpunten uitgesloten). De twee condities samengenomen betekenen dat het domein van deze functie gegeven is door

$$]0,3[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$$

(b) De linkerlimiet wordt dus

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-} f(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}-} \frac{|t - \frac{\pi}{4}|}{\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{(3-t)t}}$$

Voor de linkerlimiet kunnen we de factor $|t - \frac{\pi}{4}|$ herschrijven en komen we tot

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}-} f(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}-} \frac{-t + \frac{\pi}{4}}{\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{(3-t)t}}$$

We herkennen hierin een geval van $0/0$, wat we eventueel via de regel van de l'Hôpital kunnen uitwerken. Alternatief, en enkel gebruik makend van het feit dat we weten dat $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

kunnen we rekenen als volgt: introduceer de variabele θ via $3t + \frac{\pi}{4} = \theta + \pi$ zodat $t = \frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4}$ en dus

$$\lim_{\theta \to 0-} f(\theta) = \lim_{\theta \to 0-} \frac{-\frac{\theta}{3}}{\sin(\theta + \pi)} \frac{1}{\sqrt{(3 - \frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{4})(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4})}}$$

Aangezien $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$ is dit dus

$$\lim_{\theta \to 0-} f(\theta) = \lim_{\theta \to 0-} \frac{1}{3} \frac{\theta}{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{(3 - \frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{4})(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4})}}$$

We krijgen dan uiteindelijk als limietwaarde

$$\frac{4}{3\sqrt{\pi(12 - \pi)}}$$