Calculus I, **12/10/2009**

Reeksnr.:
Naam:

1. Beschouw de kromme $y = x^3$.

   (a) Toon aan dat er een rechte door $(a, 0)$ bestaat die raakt aan deze kromme in $x = 3a/2$.

   (b) Als $a \neq 0$, is er dan nog een andere rechte door $(a, 0)$ die raakt aan deze kromme?

   (c) Als (x_0, y_0) een willekeurig punt is, wat is dan het maximaal aantal rechten door (x_0, y_0) dat rakend kan zijn aan de kromme $y = x^3$?

(2 ptn)

Antwoord:

(a) De raaklijn aan de kromme $y = x^3$ in het punt met x-coordinaat $x = 3a/2$ vinden we als volgt: Het punt op de kromme met die x-coordinaat is gegeven door $(3a/2, 27a^3/8)$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is in elk punt van de kromme gegeven door $y' = 3x^2$, dus voor het punt $(3a/2, 27a^3/8)$ is de richtingscoëfficiënt gegeven door $3(3a/2)^2 = 27a^2/4$. De raaklijn is dan gegeven door

$$y - \frac{27a^3}{8} = \frac{27a^2}{4}\left(x - \frac{3a}{2}\right)$$

Dit kan je verder herscrhijven als

$$y = \frac{27a^2}{4}x - \frac{27a^3}{4}$$

Deze raaklijn bevat ook het punt $(a, 0)$, waarmee de uitspraak bewezen is.

(b) Er bestaat inderdaad nog een andere rechte door het punt $(a, 0)$ die raakt aan de kromme (wanneer $a \neq 0$), want de x-as (met vergelijking $y = 0$) raakt ook aan de kromme (is met name de raaklijn in de oorsprong), en die x-as bevat het punt $(a, 0)$.

(c) Beschouw een willekeurig punt op de kromme (x_1, x_1^3), dan is in dat punt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gegeven door $3x_1^2$. Voor een willekeurig punt (x_0, y_0) is dan een rechte door (x_0, y_0) met dergelijke richtingscoëfficiënt gegeven door

$$y - y_0 = 3x_1^2\,(x - x_0)$$

Om ook raaklijn te zijn in het punt (x_1, x_1^3) moeten die coördinaten voldoen aan deze vergelijking (het punt van de kromme moet op die rechte liggen), m.a.w. we moeten hebben dat

$$x_1^3 - y_0 = 3x_1^2\,(x_1 - x_0)$$

Dit is een derdegraads vergelijking in x_1, en kan tot maximaal 3 reële, onderling verschillende nulpunten hebben: het maximaal aantal rechten door een punt (x_0, y_0) dat rakend is aan de kromme $y = x^3$ is dus 3.

2. Beschouw de functie

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

(a) Bereken de limiet $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Op welke intervallen is f stijgend, op welke is f dalend? Bereken de kritieke punten van f.

(c) Als verder een even functie $g(x)$ is gegeven, is $g \circ f$ dan even, oneven, of geen van beide?

(2 ptn)

Antwoord:

(a)

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$$

Exponent wint van een macht (kan ook via de 'l Hôpital).

(b)

$$\frac{df}{dx} = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$$

Kritieke punten (waar $\frac{df}{dx} = 0$) zijn $x = \pm 1/\sqrt{2}$. De functie is stijgend (postieve afgeleide) op

$$]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$$

De functie is dalend (negatieve afgeleide) op

$$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$$

(c) De functie f is oneven, en als g een even functie is, dan is $g \circ f$ even.