Calculus I, **05/11/2010**

Reeksnr.:
Naam:

1. Beschouw de functie gegeven door

$$f(x) = \arcsin\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)$$

(a) Wat is het domein van deze functie? Geef de snijpunten met de $x-$ en $y-$coördinaatassen.

(b) Identificeer het stijgend/dalend gedrag van deze functie. Bepaal of er kritieke en/of singuliere punten zijn voor f. Geef aan welke punten uit het domein overeenkomen met extrema voor deze functie.

(2 ptn)

Antwoord:

(a) De arcsin functie heeft als domein $[-1,1]$, het domein van de functie $f(x)$ wordt dus bepaald door $1 - \sqrt[3]{x^2} \in [-1,1]$. Herwerk tot $1 - \sqrt[3]{x^2} = \pm 1 \Rightarrow x = 0$ en $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Aangezien de functie $f(x)$ een even functie is in het argument x is het domein dan ook $x \in [-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2}]$.

Snijpunt met de y-as is $f(0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. (Opmerking: We kunnen al anticiperen dat dit een maximum zal zijn voor de functie $f(x)$, gezien het bereik van de arcsin functie overeenkomt met $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.)

Snijpunten met de x-as: waar $\arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2}) = 0$, of dus waar $1 - \sqrt[3]{x^2} = 0$, wat levert $x = \pm 1$.

(b) Verloop van de functie via

$$f' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^2}} \left(\frac{(-2)}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$f' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}\left(2 - x^{\frac{2}{3}}\right)}}$$

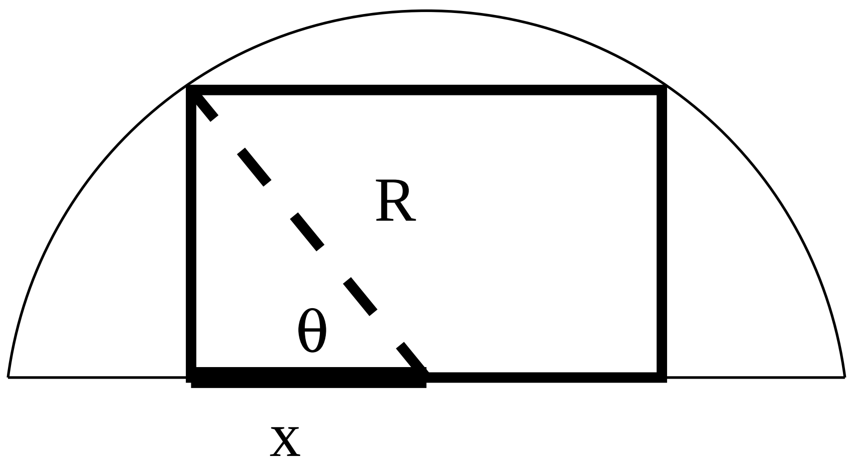
De afgeleide wordt nergens nul, er zijn dus geen kritieke punten. Singuliere punten (waar f' niet bestaat) zijn $x = 0$ en de eindpunten van het domein, namelijk $x = \pm 2\sqrt{2}$. Het teken van deze afgeleide wordt binnen het domein bepaald door de factor $-1/\sqrt[3]{x}$, of dus door het teken van x. Samenvattend

$$f' < 0 \quad \text{voor} \quad x > 0 \rightarrow \quad \text{dalend} \quad \text{voor} \quad x > 0$$

$$f' > 0 \quad \text{voor} \quad x < 0 \rightarrow \quad \text{stijgend} \quad \text{voor} \quad x < 0$$

De extrema van de functie worden gevonden in de singuliere punten, er is een globaal maximum voor $x = 0$, en globale minima voor $x = \pm 2\sqrt{2}$, waar $f(x) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

2. In een halve cirkel (met straal R) wordt een rechthoek getekend zoals aangegeven op de figuur: terwijl een van de zijden op de diagonaallijn van de halve cirkel valt worden de twee overige hoekpunten op de cirkelboog genomen. Bepaal de rechthoek die dusdanig ingeschreven, een maximale omtrek heeft (geef dus de afmetingen van de zijden). Geef voor die rechthoek dan ook zijn omtrek, en bereken het deeloppervlak van de halve cirkel wat niet bedekt is door die rechthoek.



(2 ptn)

Antwoord: De omtrek van de rechthoek kan uitgedrukt worden in functie van hetzij x (zie figuur), hetzij de hoek θ (zie figuur). Ons optimalisatieprobleem is dan met behulp van hetzij $f(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 4x$ of equivalent $g(\theta) = 4R\cos\theta + 2R\sin\theta$. We werken hier verder via f. De afgeleide is $f' = 4 - \frac{2x}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2(2\sqrt{R^2-x^2}-x)}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Een extremum (maximale omtrek) wordt bereikt voor

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = x \Rightarrow 4R^2 = 5x^2 \Rightarrow x = \frac{2R}{\sqrt{5}}$$

(enkel de positieve wortel correspondeert met een lengte). De zijden van de rechthoek worden dan $2x = 4R/\sqrt{5}$ en $\sqrt{R^2 - x^2} = R/\sqrt{5}$. De omtrek is dan $10R/\sqrt{5}$. Het deeloppervlak niet bedekt door de rechthoek is $\frac{\pi R^2}{2} - \frac{4R^2}{5} = R^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}\right)$.