Vraag 1. */2*

Bepaal het convergentieinterval($x \in \mathbb{R}$, bespreek ook de eindpunten) voor de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n+1}(x-\pi)^n.$$

Vraag 2. */2*

Zij $(a_n)_n \epsilon \mathbb{N}$ *een rij zodat* $0 \leq a_n \leq n^2$. *Toon volgende eigenschap aan.*

Als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$, *dan divergeert de reeks* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n - \sqrt{n^2 - a_n})$

Opm: Indien je gebruikt maakt van een convergentie- en/of divergentiecriterium, beargumenteer dan duidelijk dat alle voorwaarden van het criterium voldaan zijn.

Vraag 3. */3*

Een kinder suprise is een chocolade ei waarin een verrassing is verstopt. De verrassing is omhuld in een cilindervormige koker. Indien we het ei voorstellen door de ellipsoïde $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$*, wat is dan het maximale volume van een cilinder waarbij de as van de cilinder op de z-as ligt, die in deze ellipsoïde zit.*

Antwoord 1. *Voor de convergentiestraal R te berekenen berekenen we eerst $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, met $\frac{1}{L} = R$. $a_n = (-1)^n \frac{e^n}{n+1}$ dus $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{(-1)^{n+1}\frac{e^{n+1}}{n+2}}{(-1)^n\frac{e^n}{n+1}}|$. Na een beetje rekenwerk bekomen we $L = \lim_{n\to\infty} |-e\frac{n+1}{n+2}| = e$. En dus $R = 1/e$. Nu moeten we nog controleren of de randpunten $\pi + 1/e$ en $\pi - 1/e$ convergeren.*
Voor $x = \pi + 1/e$ verkrijgen we $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n+1}(1/e)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$. Het criterium van Leibniz zegt dat een alternerende reeks convergeert als ze aan 2 criteria voldoet:

- $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Aangezien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ hieraan voldoet is deze dus convergent.

Voor het 2de randpunt, $x = \pi - 1/e$, verkrijgen we $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n+1}(-1/e)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ en zien we dat deze divergent is. Het convergentie interval is dus $]\pi - 1/e; \pi + 1/e]$.

Antwoord 2. *Als de limiet van de termen van een reeks niet gelijk is aan 0 weten we dat de reeks divergeert. Dus we gaan aantonen dat*
$\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2 - a_n} \neq 0$.
$\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2 - a_n} = \lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{n^2 - a_n}) * \frac{n+\sqrt{n^2-a_n}}{n+\sqrt{n^2-a_n}}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n^2+a_n}{n+n\sqrt{1-\frac{a_n}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{a_n}{n^2}}}$
$= 1 * 1/2 = 1/2 \neq 0$

Antwoord 3. *Het volume van een cilinder is* $V = \pi r^2 h$. *De as van de cilinder ligt op de z-as dus z is de hoogte h van de halve cilinder (want de ellipsoïde wordt doormidden gesneden in het xy-vlak) en de straal r wordt gegeven door* $x^2 + y^2$. *Dus hebben we de te optimaliseren functie* $f(x, y, z) = \pi(x^2 + y^2)z$ *met nevenvoorwaarde* $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$. *De lagrangiaanse functie is dan* $L(x, y, z, \lambda) = \pi(x^2 + y^2)z + \lambda(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2})$. *Nu moeten we zoeken voor welke* x, y, z, λ *de gradiënt van deze functie gelijk is aan 0. Dus* $2\pi xz\boldsymbol{i} + 2\pi yz\boldsymbol{j} + \pi(x^2 + y^2)\boldsymbol{k} + 2\lambda x\boldsymbol{i} + 2\lambda y\boldsymbol{j} + \lambda z\boldsymbol{k} = 0$. *Dit levert ons samen met de nevenvoorwaarde volgend stelsel op:*

$$\begin{cases} 2\pi xz + 2\lambda x = 0 \\ 2\pi yz + 2\lambda y = 0 \\ \pi(x^2 + y^2) + \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Dit kunnen we nog vereenvoudigen door in te zien dat op iedere hoogte z er oneindig veel koppels x en y zijn die de straal van het grondvlak beschrijven(want de doorsnede van de ellipsoïde met een vlak op hoogte z evenwijdig met het xy-vlak geeft een cirkel met straal $r = \sqrt{x^2 + y^2}$*). We kiezen hier daarom* $y = 0$ *en* $x \neq 0$ *zodat* $x^2 = r^2$*. dan vereenvoudigt ons stelsel tot:*

$$\begin{cases} x(2\pi z + 2\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ \pi(x^2 + y^2) + \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Na x weg te delen in de eerste vergelijking, de eerste vergelijking in functie van λ *te zetten en* $y = 0$ *in te vullen in de 3de en 4de vergelijking:*

$$\begin{cases} \lambda = -\pi z \\ y = 0 \\ \pi x^2 + \lambda z = 0 \\ x^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Dan kunnen we λ invullen in de 3de vergelijking en deze daarna omvormen:

$$\begin{cases} \lambda = -\pi z \\ y = 0 \\ x^2 = z^2 \\ x^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Als we dan nog x^2 invullen en terug substitueren:

$$\begin{cases} \lambda = -\pi z \\ y = 0 \\ x^2 = 2/3 \\ z^2 = 2/3 \end{cases}$$

Dan kunnen we deze waarden voor x,y en z in onze volume functie stoppen maar deze moeten we maal 2 doen aangezien we hier alleen maar het volume van de helft boven het xy-vlak hebben berekend. $V = 2 * \pi * (2/3 + 0) * \sqrt{2/3} = 4/3 * \sqrt{2/3} * \pi$