Calculus I, **21/10/2011**

Reeksnr.:
Naam:

1. Beschouw de astroïde gegeven door (met $a \in \mathbb{R}_0^+$)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

   (a) Bepaal de vergelijking van de raaklijn in een willekeurig punt (x_0, y_0) gelegen op de astroïde.

   (b) Bereken de coördinaten van de snijpunten van die raaklijn met de coördinaatassen (punt P_1 met de x-as en punt P_2 met de y-as). Toon aan dat de afstand tussen P_1 en P_2 gelijk is aan a.

(2 ptn)

Antwoord:

Gebruik bijvoorbeeld impliciete differentiatie om de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt te bekomen. Dan krijg je

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Voor een punt (x_0, y_0) op de astroïde is dan de raaklijn gegeven door

$$y - y_0 = -\frac{y_0^{\frac{1}{3}}}{x_0^{\frac{1}{3}}}(x - x_0)$$

en aangezien (x_0, y_0) op de astroïde ligt is $x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ of $y_0 = \sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}} - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^3}$ (we beperken ons hier tot de positieve wortel, analoog voor de negatieve). Je kan dan de snijpunten van de rechte met de x-as ($y = 0$) bepalen, je krijgt $(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}, 0)$. Snijpunt met de y-as (waar $x = 0$) bereken je als $(0, a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x_0^{\frac{2}{3}}})$.

De afstand tussen beide punten bekom je dan vanuit

$$\sqrt{\left(x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(-a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x_0^{\frac{2}{3}}}\right)^2} = a$$

Reeksnr.:
Naam:

2. Beschouw de functie

$$m(x) = \frac{(x^2 + 2x - 15)}{(x-3)} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

(a) Bepaal de volgende twee limieten

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{m(x)}{x} \equiv L$$

$$\lim_{x \to +\infty} (m(x) - L\, x)$$

(b) Geef het domein van de functie $m(x)$. Bestaat er een continue uitbreiding van de functie $m(x)$ zodat het domein heel $\mathbb{R}$ wordt? Beargumenteer je antwoord.

(2 ptn)

Antwoord:

We merken eerst op dat het domein van $m(x)$ gelijk is aan $\mathbb{R}\setminus\{0, 3\}$. Merk op dat voor $x \neq 3$ we kunnen schrijven

$$m(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = (x+5) \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

Aangezien verder de gekende limiet $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ is het gedrag voor grote waarden van x (zowel naar $+\infty$ als naar $-\infty$) bepaald door de voorfactor $(x+5)$, die een schuine asymptoot is voor de functie $m(x)$. We lezen dan ook af dat

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{m(x)}{x} \equiv 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (m(x) - \, x) = 5$$

Voor de continue uitbreiding $M(x)$ moeten we nog kijken naar mogelijke functiewaarden voor $x = 3$ and $x = 0$. Aangezien $\lim_{x \to 3} m(x) = 24 \sin(\frac{1}{3})$ is dit dus de waarde voor $M(3)$. Omdat $\lim_{x \to 0} m(x) = 0$ (hier gebruik je bv het insluittheorema) is dus $M(0) = 0$. Er bestaat dus een continue uitbreiding van $m(x)$, met name $M(x) = m(x)$ voor $\mathbb{R}\setminus\{0, 3\}$ en dus $M(0) = 0$ en $M(3) = 24 \sin(\frac{1}{3})$.