Calculus I, **04/11/2011**

Reeksnr.:
Naam:

1. Beschouw de functie gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\arcsin\big(\ln(x^2+1)\big)$$

   (a) Bepaal het domein van deze functie. Wat is het bereik van de functie?

   (b) Bespreek het stijgend/dalend gedrag van de functie op haar domein. Identificeer alle kritieke en singuliere punten. Geef aan waar de functie globale extrema bereikt.

   (c) Als $g(x)$ een oneven functie is (met domein $\mathbb{R}$), is $g \circ f$ dan even, oneven, of geen van beide?

(2 ptn)

Antwoord: Aangezien het domein voor arcsin beperkt is tot $[-1,1]$ moet

$$-1 \leq \ln(x^2+1) \leq 1$$

Nu is zeker dat $\ln(x^2+1) \geq 0$ dus moet enkel $\ln(x^2+1) \leq 1$ bekeken worden. Daaruit volgt

$$x^2+1 \leq e$$

en we komen tot

$$-\sqrt{e-1} \leq x \leq \sqrt{e-1}$$

Het bereik van arcsin is voor positieve argumenten (aangezien $\ln(x^2+1) \geq 0$) beperkt tot $[0,\frac{\pi}{2}]$ en dus is het bereik voor $f(x)$ gelijk aan $[0,\frac{1}{2}]$.

De afgeleide van de functie is gegeven door

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\arcsin\big(\ln(x^2+1)\big) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(\ln(x^2+1))^2}}\frac{2x}{x^2+1}$$

Het teken hiervan wordt bepaald door de factor x, de functie f is dalend op $[-\sqrt{e-1},0[$ en stijgend op $]0,\sqrt{e-1}]$.

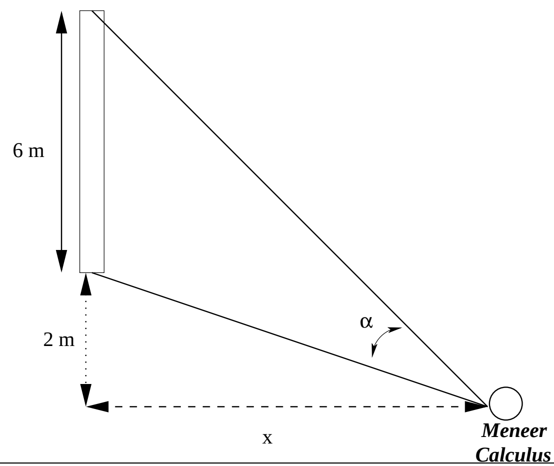
Het enige kritieke punt (waar $f'(x)=0$) is $x=0$. Daar is de functiewaarde $\frac{1}{\pi}\arcsin(\ln(1))=0$, en dit is een globaal minimum. Singuliere punten (waar $f'(x)$ onbepaald is) zijn de eindpunten $x=\pm\sqrt{e-1}$. In die punten is de functiewaarde $\frac{1}{2}$, en dit zijn dan ook globale maxima.

Aangezien $f(x)$ een even functie is (d.w.z. $f(-x)=f(x)$) is $g \circ f$ even bij oneven $g(x)$ want

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Reeksnr.:	
Naam:	

2. Een enorm tapijt van 6 meter lang is vertikaal aan een muur bevestigd, in een vierkante kamer van 20 meter op 20 meter. Meneer Calculus komt dit tapijt bewonderen, en constateert dat de onderste rand van het tapijt zich 2 meter hoger bevindt dan zijn horizontale kijklijn. Op welke afstand van de muur waarop het tapijt is bevestigd moet meneer Calculus gaan staan, om het beste zicht te hebben op het hele tapijt? (In de figuur: voor welke x-waarde is α maximaal?) *(2 ptn)*



Antwoord: In de rechthoekige driehoek met horizontale zijde x en vertikale zijde $6+2$ kunnen we opmerken dat

$$\cot(\alpha+\psi) = x/8$$

Hierbij is ψ de hoek die de vertikale lengte van 2 meter overspant vanuit de positie van meneer calculus. We krijgen dus

$$\alpha(x) = \operatorname{arccot}(x/8) - \psi$$

In de driehoek met horizontale zijde x en vertikale zijde 2 is verder analoog $\cot\psi = x/2$ dus we krijgen

$$\alpha(x) = \operatorname{arccot}(x/8) - \operatorname{arccot}(x/2)$$

We berekenen de afgeleide

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{8}{64+x^2} + \frac{2}{4+x^2} = -6\frac{x^2-16}{(4+x^2)(64+x^2)}$$

In het bereik van de kamer $x \in [0,20]$ is er een maximum voor $x = 4$ meter. Je kan nagaan dat $\alpha(x)$ stijgend is voor $x \in [0,4]$ en dalend voor $x \in [4,20]$ zodat we wel degelijk een maximum hebben.