Opgave 1

In het algemeen is deze vraag goed opgelost. Hier en daar is men wel nog slordig in notatie. Let daar dus zeker op! Door slordig te zijn, vergeten verschillende studenten een minteken mee te nemen in hun berekening, wat dus resulteerde in een foutieve uitkomst[1]. Zet ook voldoende tussenstappen en geef aan wat je er precies doet. De verdeling bij de eerste vraag was:

- 1.75 punten op vraag a);
- 0.75 punten op vraag b).

Bij a) kreeg je 0.5 punten voor het berekenen van de eerste en tweede afgeleide (samen 1 punt dus), 0.25 punten voor het berekenen van je asymptoten en dan nog 0.5 punten voor je tekentabel én schets. Bij vraag b) kreeg je 0.25 punten voor het correct (dus met een limiet) uitrekenen van de oneigenlijke integraal, 0.25 punten voor het correct toepassen van partiële integratie en 0.25 punten voor het bepalen van de limiet (dus Hopital o.i.d. gebruiken). De belangrijkste, vaker voorkomende fouten zijn:

- Er werd soms gezegd dat $e^{-x} = 0$ als $x = +\infty$. Dit kan niet! $+\infty$ is **geen** getal, maar een symbool om aan te geven dat iets willekeurig groot wordt.
- Ook een schets moet nog ongeveer kloppen. In dit geval was er een snijpunt met de y-as voor $y = 1$. Zorg er dan ook voor dat je grafiek de y-as ergens snijdt.
- Voor $x \to +\infty$ is $y = 0$ een horizontale asymptoot, niet $x = 0$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ en niet 0.
- Zorg voor een uitleg waarom je limiet 0 is. Ook "exponentiële wint van macht" was goed.

Vraag a)

We berekenen eerst de eerste en tweede afgeleide. We zien dat

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}(-1) + e^{-x}(-1) = (x-2)e^{-x}$$

en

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}(-1) + e^{-x} = (3-x)e^{-x}.$$

Merk op dat zowel $f(x)$ als $f'(x)$ als $f''(x)$ gedefinieerd is voor alle $x \in \mathbb{R}$. Verder zien we dat

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

en dat

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{e^x}$$

[1] Als er iets dergelijks gebeurde, werd er **eenmalig** 0.5 afgetrokken voor een telfout (TF) op het **eindtotaal** van je resultaat.

een onbepaalde vorm is van het type $\left[\frac{\pm\infty}{+\infty}\right]$ en dus kunnen we de tweede versie van de regel van l'Hôpital (stelling 4 pagina 231) gebruiken en vinden we dat

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{-1}{e^x} = 0.$$

Ook is

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

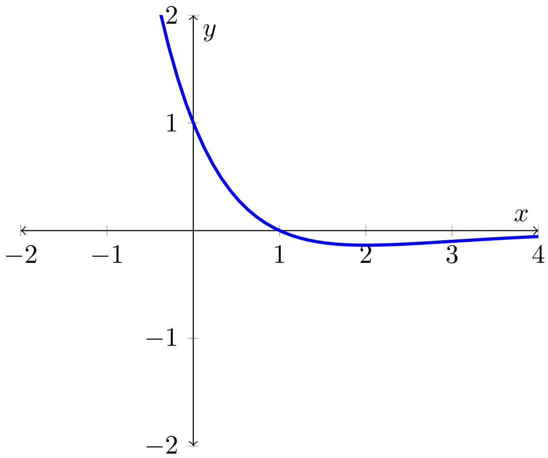
zodat er geen schuine asymptoot is. We bepalen nu de nulpunten (we weten dat $e^{-x} > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$):

- $f(0) = 1$;
- $f(x) = 0$ als en slechts als $x = 1$;
- $f'(x) = 0$ als en slechts als $x = 2$;
- $f''(x) = 0$ als en slechts als $x = 3$.

We hebben nu volgende tabel

x		1		2		3	
$f'(x)$	-		-	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$+$		$+$	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
	$\smile$		$\smile$	min	$\smile$	bgpt	$\frown$

Met behulp van deze tabel kunnen we een plot van de grafiek maken:



b) We berekenen eerst

$$\int (1-x)e^{-x}dx.$$

We passen partiële integratie toe met $U(x) = 1 - x$ en $dV(x) = e^{-x}dx$, dus $dU(x) = -dx$ en $V(x) = -e^{-x}$. Dan is

$$\begin{aligned}\int (1-x)e^{-x}dx &= (1-x)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})(-1)dx \\ &= (x-1)e^{-x} - \int e^{-x}dx \\ &= (x-1)e^{-x} + e^{-x} + C \\ &= xe^{-x} + C.\end{aligned}$$

Daar nu (definitie 1 pagina 361)

$$\int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R (1-x)e^{-x}dx$$

zien we dat

$$\int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty} \left(Re^{-R} - e^{-1}\right) = \left(\lim_{R\to+\infty} Re^{-R}\right) - e^{-1}.$$

We moeten nu dus $\lim_{R\to+\infty} Re^{-R} = \lim_{R\to+\infty} \frac{R}{e^R}$ berekenen. We zien dat we een onbepaalde vorm krijgen van het type $\left[\frac{\pm\infty}{+\infty}\right]$ en dus kunnen de tweede versie van de regel van l'Hôpital (stelling 4 pagina 231) gebruiken en vinden we dat

$$\lim_{R\to+\infty} Re^{-R} = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{e^R} = 0.$$

Bijgevolg is

$$\int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x}dx = -e^{-1}.$$

Opgave 2

Deze opgave werd duidelijk als moeilijker ervaren. Nochtans gaven we de formule die je nodig had en was dit "gewoon" een maximalisatie-probleem. Je had dus geen omwentelingslichamen nodig (het gaat wel, maar is veel meer werk). Ook gingen sommige studenten het volume berekenen i.p.v. de oppervlakte. Nochtans stond duidelijk in de opgave dat het ging over de oppervlakte. Bij deze vraag kreeg je

- 0,75 punten voor het correct opstellen van de formule;
- 0.5 punten voor het berekenen van de afgeleide;
- 0.25 punten voor het berekenen van de nulpunten van de afgeleide;
- 0.25 punten voor het nagaan of ons nulpunt een maximum is;
- 0.25 punten voor het berekenen van de bijhorende oppervlakte.

Studenten die zichzelf verloren in de berekeningen, konden toch nog 1/2.5 scoren voor het correcte idee.

Er werden vele verschillende aanpakken gebruikt en velen hiervan waren ook goed. Hieronder schetsen we de oplossing die wijzelf voor ogen hadden.

Zij M het middelpunt van de cirkel en zij $|CM| = x$. Merk op dat $-10 < x < 10$. Dan weten we dat $|AM| = 10$ en dus is

$$|AC| = \sqrt{|AM|^2 - |CM|^2} = \sqrt{10^2 - x^2}.$$

Bijgevolg zien we dus dat, daar $|CT| = 10 + x$, we hebben

$$|AT| = \sqrt{|AC|^2 + |CT|^2} = \sqrt{(10^2 - x^2) + (10 + x)^2} = 2\sqrt{5}\sqrt{10 + x}.$$

De zijdelingse oppervlakte $A(x)$ van de kegel wordt dus gegeven door

$$A(x) = \pi|AT||AC| = 2\sqrt{5}\pi\sqrt{(10^2 - x^2)(10 + x)}.$$

Berekenen we nu de afgeleide, dan zien we dat

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\pi\sqrt{5}\frac{1}{2\sqrt{(10^2 - x^2)(10 + x)}}\left((-2x)(10 + x) + (10^2 - x^2)\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi(-3x^2 - 20x + 100)}{\sqrt{(10^2 - x^2)(10 + x)}}. \end{aligned} \tag{1}$$

We zien nu dat $A'(x) = 0$ als en slechts als $-3x^2 - 20x + 100 = 0$ of dus

$$x = -10 \text{ of } x = \frac{10}{3}.$$

Merk op dat $x = -10$ niet kan. We beweren nu dat voor $x = \frac{10}{3}$ de functie $A(x)$ een maximum bereikt op $]-10, 10[$. Uit (1) halen we dat $A'(x) > 0$ voor alle $x \in \left(-10, \frac{10}{3}\right)$ (want een vierkantswortel is altijd positief en $-3x^2 - 20x + 100 > 0$) en dat $A'(x) < 0$ voor alle $x \in \left(\frac{10}{3}, 10\right)$. De eerste afgeleide test (stelling 7 pagina 235) zegt ons dan dat $A(x)$ inderdaad een maximum bereikt in $x = \frac{10}{3}$ op $]0, 10[$. De oppervlakte is hier gelijk

$$A\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{800\pi}{3\sqrt{3}}.$$