

Modeloplossing 4de deexamen Calculus I van 16/12/2011

December 21, 2011

1 Vraag 1

Beschouw de functie $f(x) = x \sin(2x)$.

- Geef de uitdrukking voor de Maclaurinreeks van deze functie.
- Geef ook de uitdrukking voor de Taylorreeks van deze functie rond het punt $x = \pi/3$.

Antwoord:

- We vertrekken van de bekende Maclaurinreeks van de sinusfunctie

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Gebruik dit om de functie f te herschrijven als

$$f(x) = x \sin(2x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2}.$$

Dit is de Maclaurinreeks van de functie f .

- We definiëren $t = x - \pi/3$. We vinden dan

$$f(x) = f(t + \pi/3) = (t + \pi/3) \sin(2t + 2\pi/3).$$

Het volstaat dan om de Maclaurinreeks van deze uitdrukking te vinden in de variabele t . Om dit te kunnen doen, herschrijven we de vorige uitdrukking als

$$\begin{aligned} f(x) &= (t + \pi/3) \sin(2t + 2\pi/3) = (t + \pi/3) (\sin(2t) \cos(2\pi/3) + \cos(2t) \sin(2\pi/3)) \\ &= (t + \pi/3) \left(-\frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2t) \right). \end{aligned}$$

We gebruiken dan de bekende Maclaurinontwikkeling voor de sinus- en de cosinus-functie. Dit geeft

$$\begin{aligned} f(x) &= (t + \pi/3) \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} t^{2n+2}}{(2n+1)!} + \frac{\pi}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} t^{2n+1}}{(2n)!} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} t^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Wanneer we dit herschrijven in termen van x bekomen we de Taylorreeks van f rond $x = \pi/3$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+2} + \frac{\pi}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

2 Vraag 2

Beschouw de functie $T(x, y) = x^2 + 2x + y^2$ op het gebied gegeven door $x^2 + 4y^2 \leq 24$.

- Geef de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van T , voor het punt $(4, 1)$.
- Ga na of $T(x, y)$ een kritiek punt bevat in het binnengebied $x^2 + 4y^2 < 24$. Gebruik de Hessiaanse matrix om te bepalen of dit inwendig punt een lokaal maximum, minimum of geen van beide is.
- Bereken alle extrema van $T(x, y)$ op de rand gegeven door $x^2 + 4y^2 = 24$. Wat is de maximale en minimale waarde die $T(x, y)$ aanneemt binnen $x^2 + 4y^2 \leq 24$?

Antwoord:

- We hebben de partiële afgeleiden nodig van T in het punt $(4, 1)$

$$T_1(4, 1) = 10, \quad T_2(4, 1) = 2.$$

Bovendien is $T(4, 1) = 25$. Het raakvlak is dus gegeven door

$$z = 25 + 10(x - 4) + 2(y - 1).$$

- Om een kritiek punt te vinden stellen we beide partiële afgeleiden gelijk aan nul

$$T_1(x, y) = 2x + 2 = 0, \quad T_2(x, y) = 2y = 0.$$

De enige oplossing is het punt $(-1, 0)$. Dit punt ligt inderdaad in het binnengebied van de ellips, want

$$(-1)^2 + 4 \cdot 1^2 = 5 < 24.$$

We gaan na welk type kritiek punt we gevonden hebben. Hiertoe berekenen we de Hesiaanse matrix in $(-1, 0)$

$$H(-1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aangezien dit een diagonaalmatrix is, staan de eigenwaarden gewoon op de diagonaal. We vinden dus twee positieve eigenwaarden 2 en 2. T bereikt dus een lokaal minimum in $(-1, 0)$ met waarde -1 .

- (c) Om de extrema op de rand te vinden gebruiken we de Lagrangemethode. We definiëren de functie $L(x, y, \lambda)$ als

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 24).$$

Alle extrema op de rand zijn oplossingen van het volgende stelsel

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 24. \end{cases}$$

Om extrema te vinden lossen we het volgende (vereenvoudigde) stelsel op

$$\begin{cases} x - 1 + \lambda x = 0 \\ y(1 + 4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 24. \end{cases}$$

De tweede vergelijking leert ons dat $y = 0$ of $\lambda = -1/4$. Vanaf hier onderscheiden we dus 2 gevallen.

Geval 1: $y = 0$. De laatste vergelijking wordt dan $x^2 = 24$. Dus $x = \pm\sqrt{24}$. We vinden dus twee extrema

$$\begin{cases} (\sqrt{24}, 0) & \text{met } T(\sqrt{24}, 0) = 24 + 2\sqrt{24}, \\ (-\sqrt{24}, 0) & \text{met } T(-\sqrt{24}, 0) = 24 - 2\sqrt{24}. \end{cases}$$

Geval 2: $\lambda = -1/4$. Uit de eerste vergelijking halen we dan $x = -4/3$ en uit de laatste $y = \pm\frac{5\sqrt{2}}{3}$. We vinden dus nog twee extrema

$$\begin{cases} \left(-\frac{4}{3}, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right) & \text{met } T\left(-\frac{4}{3}, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{14}{3}, \\ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5\sqrt{2}}{3}\right) & \text{met } T\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{14}{3}. \end{cases}$$

Globaal minimum/maximum. De globale extrema worden bereikt in het kritiek punt in het binnengebied of in de extrema op de rand. Een vergelijking van alle functiewaarden in deze 5 punten leert ons dat het globale minimum -1 is (wordt bereikt in $(-1, 0)$) terwijl het globale maximum $24 + 2\sqrt{24}$ is (wordt bereikt in $(\sqrt{24}, 0)$).