Examen Complexe Analyse 18/6

Arno Kuijlaars

18 juni 2007

Elke oefening stond op 4 punten. Het mondelinge deel ook.

1 Vraag 1

Zij Ω een gebied en f analytisch op $\Omega \setminus \{a\}$. Neem aan dat voor alle z uit Ω geldt

$$|f(z)| \leq M|z-a|^{-p}$$

voor een positieve M en $0 < p < 1$.

- Toon aan dat f een ophefbare singulariteit heeft in a.
- Zij $r > 0$ zodat $D(a,r) \subset \Omega$. (opmerking van mezelf: ik denk dat hier eigenlijk de gesloten bol moet staan.) Hoe zou je volgende integraal berekenen?

$$\int_{C(a,r)} f(z)\, dz$$

2 Vraag 2

Beschouw de integraal

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ax}}{1+e^x}\, dx.$$

- Voor welke $a \in \mathbb{C}$ is de integraal integreerbaar?
- Bereken voor die a's de integraal m.b.v. een rechthoekig contour met hoekpunten $\pm R, \pm R + 2\pi i$.

3 Vraag 3

- Zij (p_n) een rij veeltermen die uniform convergeert naar 1 op de eenheidscirkel $C(0,1)$. Bewijs m.b.v. het maximumprincipe dat (p_n) ook uniform convergeert naar 1 op de eenheidsschijf $D(0,1)$.

- Toon aan dat er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat

$$\max_{z \in C(0,1)} |p(z) - \frac{1}{z}| \geq \epsilon$$

voor elke veelterm p.

- **Bonusvraag:** Welk is de grootste ϵ die je kan kiezen in vorige deelvraag?

4 Vraag 4

Beschouw het gebied

$$G = \{z \in \mathbb{C} | |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}.$$

Dan is G een gebied begrensd door 2 cirkelbogen die snijden op $\pm i$ in hoeken van $\frac{\pi}{2}$. Dat moet je niet bewijzen.

- Zoek een Möbiustransformatie die G afbeeld op de sector

$$\{z \in \mathbb{C} | |\arg(z)| < \alpha\}.$$

Wat is de waarde van α?

- Zoek een conforme afbeelding die G afbeeldt op $D(0,1)$.

Dit zijn de vragen zoals ik mij ze herinner. Het kan natuurlijk zijn dat ik me vergis. Mijn excuses als dat zo is.