Examen Complexe Analyse (September 2008)

De examenvragen vind je op het einde van dit documentje. Omdat het hier over weinig studenten gaat, heb ik geen puntenverdeling meegegeven.

Vraag 1.

Je had eerst moeten zeggen dat differentieerbaarheid van f impliceert dat g differentieerbaar is, dwz totaal afleidbaar. Er volgt ook dat de partiële afgeleiden van de componentfuncties van g bestaan, continu zijn en voldoen aan de Cauchy-Riemann voorwaarden. Omgekeerd weten we dat het bestaan van de partiële afgeleiden al niet voldoende is voor het totaal afleidbaar zijn van g. Verder zal het totaal afleidbaar zijn van g ook niet voldoende zijn voor het afleidbaar zijn van f. Verder weten we nog dat het bestaan van continue partiële afgeleiden van g impliceert dat de totale afgeleide van g bestaat en continu is. Maar ook dat zal nog niet voldoende zijn voor het differentieerbaar zijn van f. Die partiële afgeleiden moeten ook voldoen aan de Cauchy-Riemann voorwaarden.

De essentie is natuurlijk dat voor een complex differentieerbare functie f de totale afgeleide van g een lineaire afbeelding is van een bepaald type, namelijk afkomstig van vermenigvuldigen met een getal in $\mathbb{C}$.

Een eenvoudig voorbeeld illustreert dit laatste. Neem $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = \overline{z}$. Deze functie is niet complex differentieerbaar, maar de corresponderende functie g is dat wel (want zelf al lineair).

Het was toch belangrijk om hier ook een voorbeeld te geven.

Vraag 2.

De meeste studenten zien hier een belangrijk probleem over het hoofd. Je integreert namelijk over de rand van het gebied. Je kan dus niet zomaar de integraalformule toepassen. Je kan dit wel doen indien de kromme iets kleiner is, bijvoorbeeld gegeven door $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$. Dan moet je de limiet nemen voor $r \to 1$ en een of ander argument gebruiken om limiet en integraal om te wisselen.

Een andere mogelijkheid was om te verwijzen naar Theorem 4.7.1 uit de nota's van Ash en Novinger.

Vraag 3.

Hier moest je dus een aantal tegenvoorbeelden geven. Een voorbeeld waarbij de verzameling niet samenhangend is, is niet moeilijk. Je neemt bijvoorbeeld twee disjuncte open schijven en stelt $f = 0$ in een schijf en $f = 1$ in de andere. Een ander voorbeeld krijg je door $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ te definiëren voor $z \neq 0$. Deze functie heeft een rij van nulpunten die naar 0 convergeren. Op die manier krijg je dat de verzameling van nulpunten wel een ophopingspunt heeft maar dat ligt buiten het domein. Definieer je bijvoorbeeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = 0$ te stellen voor $x < 0$ en $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ voor $x \geq 0$ dan krijg je een oneindig differentieerbare functie op $\mathbb{R}$ die 0 is op een groot deel van het domein, maar niet overal. Het probleem hier is dat de functie niet analytisch kan uitgebreid worden tot gans $\mathbb{C}$.

Er zijn nogal wat studenten die een voorbeeld geven van een functie die niet analytisch is, maar ook niet goed gedefinieerd. Je kan bijvoorbeeld niet f van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$ definiëren door $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ te stellen. De voorbeelden die op die manier bekomen worden zijn dikwijls eerder illustraties van het feit dat de verzameling van nulpunten een ophopingspunt moet hebben in het domein en dus niet van het feit dat de functie analytisch moet zijn.

Vraag 4.

Deze was dacht ik in de oefeningen gemaakt. De meeste studenten merken op dat je een pool hebt van orde 2 in 0 en van orde 1 in de overige nulpunten van de noemer. Sommige studenten merken op dat je geen geisoleerde singulariteit hebt op ∞. Verder had je hier ook nog de residu's kunnen berekenen van de functie in de polen.

Vraag 5.

Hier moest je wel wat zorgvuldig te werk gaan in je keuzes. Neem eerst een willekeurige gesloten schijf rond 0, met straal R. Kies dan voor de kromme γ een cirkel met middelpunt 0 en een straal die groter is dan R, bijvoorbeeld $R+1$. Uit de integraalformule haal je dan dat voor elke $z \in \mathbb{C}$ die voldoet aan $|z| \leq R$ en voor elke n

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\, dw.$$

Afschatten levert dan

$$|f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi(R+1) \sup_{|w|=R+1} |f_n(w)|$$

en het rechterlid gaat naar 0 voor $n \to \infty$ omdat verondersteld werd dat f_n uniform naar 0 gaat op gesloten schijven met middelpunt 0 en dus zeker op de rand van zo'n schijven. Bovendien hangt het rechterlid niet af van het punt z (alleen maar van de straal R) en er volgt dus uniforme convergentie van de afgeleiden.

P.S. In de vraag had strikt genomen moeten staan dat verondersteld werd dat de functies analytisch waren, maar dat was impliciet omdat er gesproken werd over de afgeleiden.

Vraag 6.

Hier hebben alle studenten juist geantwoord alhoewel het wel wat nauwkeuriger kon. Het is essentieel om op te merken dat de functie $z \mapsto z^p$ wordt gedefinieerd door een keuze te maken van het argument van z. Dit ligt strikt tussen 0 en 2π. Wanneer dus z iets boven de reële as ligt, zal dit argument iets groter zijn dan 0 en naar 0 covergeren. Als z iets onder de reële as ligt, dan zal dit argument iets kleiner zijn dan 2π en naar 2π convergeren.

Vraag 7.

Dit was in feite een gemakkelijke vraag als je wist wat je moest gebruiken. Het resultaat is te vinden bij Ash en Novinger (Corollary 4.7.4) en in de nota's (deel 4, Stelling 3.5) waar je dan gewoon $f = 1$ neemt.

Vrijdag, 5 september 2008.

Complexe Analyse Reeks 3 Datum: 1 september 2008 Naam:

---

(1) Beschouw een functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Definieer $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$g(x, y) = (\mathrm{Re} f(x + iy), \mathrm{Im} f(x + iy))$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Bespreek het verband tussen het differentieerbaar zijn van de functie f (als complexe functie) en het differentieerbaar zijn van g (als functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$). Je moet niets bewijzen, maar toon vooral aan dat je dit verband goed begrijpt.

(2) Noteer $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Beschouw een functie $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$. Veronderstel f continu op $\overline{D}$ en analytisch op D. Toon aan dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{1 - z\overline{a}}{z - a} dz = (1 - |a|^2) f(a)$$

indien $|a| < 1$ en $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ waarbij $\theta \in [0, 2\pi]$.

(3) Beschouw de identiteitsstelling zoals je die vindt bij Ash-Novinger onder item 2.4.8. Illustreer de verschillende voorwaarden in deze stelling aan de hand van tegenvoorbeelden.

(4) Wat zijn de singulariteiten van de functie

$$z \mapsto \frac{1}{z(e^z - 1)},$$

(gedefinieerd voor die complexe complexe getallen waarvoor de noemer niet nul is) en wat kun je allemaal zeggen over deze singulariteiten?

(5) Veronderstel dat (f_n) een rij is van complexe functies op gans $\mathbb{C}$ die uniform naar 0 convergeert op elke gesloten schijf met middelpunt 0 in $\mathbb{C}$. Dan zal dit ook gelden voor de rij (f_n') van de afgeleiden. Toon dit aan, niet door te steunen op Stelling 2.2.17 uit Ash-Novinger, maar door het bewijs van deze stelling op een efficiënte manier aan te passen aan dit speciaal geval (en gebruik dus niet meer dan nodig).

(6) Deze vraag verwijst naar Werktekst 6 die gaat over de berekening van de reële integraal

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p(x + 1)} \, dx$$

waarbij $0 < p < 1$. In de loop van de berekeningen wordt op een bepaald moment de limiet voor $r \to 0$ genomen waarbij in het ene geval t^p de uitkomst is en in het andere geval $t^p e^{2\pi i p}$ (let op de drukfout in de Werktekst). Leg deze stap nauwkeuriger uit.

(7) Toon aan dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\varphi = 1$$

voor elke $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $0 \leq r < 1$. Je moet daarvoor deze integraal niet uitrekenen!

Veel geluk