

Enkele bedenkingen bij het examen Complexe Analyse

De examenvragen vind je op het einde van dit documentje.

Eerst een paar algemene opmerkingen.

Vele antwoorden zijn slordig opgeschreven wat het lezen en verbeteren niet aangenaam en zelfs moeilijker maakt. Ik begrijp dat er onder tijdsdruk moet gewerkt worden en dat je dikwijls geen tijd hebt om antwoorden eerst in het klad volledig af te werken en dan netjes over te schrijven. Maar toch ... iets meer zorg zou beter zijn.

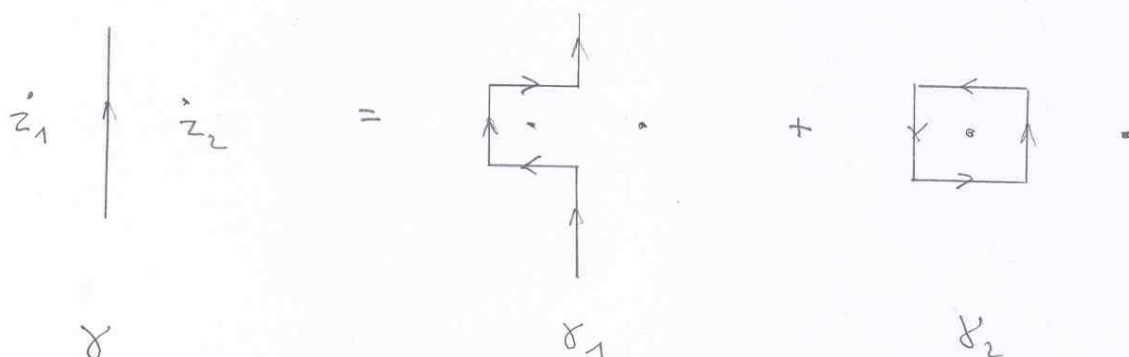
Dikwijls wordt er meer opgeschreven dan nodig is. Indien studenten zich wat meer zouden beperken tot wat essentieel is, zou er misschien ook wat meer tijd zijn om de antwoorden netjes neer te schrijven.

Vraag 1.

Deze vraag was niet zo gemakkelijk, zeker niet om op een beknopte manier toch een correcte argumentatie te geven. De meeste studenten hebben opgemerkt dat het verschil tussen beide windinggetallen 1 is of -1. Dat is juist, maar je kan meer zeggen: Wanneer de oriëntatie van de kromme gekend is, kun je ook precies weten of het 1 is of -1. Voor de tekening hier onder



geldt $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1$ in het eerste geval en $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) - 1$ in het tweede geval. Er zijn maar weinig studenten die dit opgemerkt hebben. Verder is er bijna niemand die hier een correct argument geeft. Er zijn verschillende mogelijkheden, maar je kan je laten inspireren door de volgende figuur:



Hiermee wordt dan bedoeld dat de integraal over γ gelijk is aan de integraal over γ_1 plus de integraal over γ_2 . Dit geeft dan dat in deze situatie

$$\begin{aligned}n(\gamma, z_1) &= n(\gamma_1, z_1) + n(\gamma_2, z_1) \\&= n(\gamma_1, z_2) + 1 \\&= n(\gamma, z_2) + 1\end{aligned}$$

en dit levert het resultaat op.

Vraag 2.

Blijkbaar wist niet iedereen wat compacte drager betekent? Hier betekent dit dat er een begrensde interval is waarbuiten $f = 0$. Wanneer $[a, b]$ zo'n interval is, moet je slechts integreren van a tot b . Het was dus niet nodig om met oneigenlijke integralen te werken. Dit is belangrijk voor een correcte verdere argumentatie.

Verder bewijs je dit gemakkelijkst door gebruik te maken van de stelling van Morera. Dan moet je wel eerst argumenteren waarom f continu is. Dan moet je twee integralen verwisselen.

Voor beide kan je steunen op een resultaat uit Analyse 1 over het integreren van een continue functie van twee veranderlijken naar een van die veranderlijken. Voor een correcte toepassing hier, moet je wel argumenteren dat je lijnintegraal een som is over verschillende deelintervallen waarop de afgeleide γ' van de kromme γ (in dit geval een driehoek) nog continu is. Je kan ook Fubini gebruiken, maar dat is wat zwaar voor deze situatie.

Het resultaat kon ook bewezen worden door gewoon te verwijzen naar Lemma 3.3.3 uit Ash en Novinger.

Vraag 3.

Wat je bij deze vraag absoluut niet moest doen is beginnen rekenen (zoals toch wel vele studenten gedaan hebben). Dat was helemaal niet de bedoeling (en trouwens ook niet nodig). Een toepassing van de Stelling van Taylor geeft onmiddellijk dat de convergentiestraal minstens 1 is. Ze kan ook niet groter zijn, want dan zou de functie analytisch uitbreidbaar zijn in het punt $z = 0$ en dat kan niet want als z convergeert naar 0 gaat $f(z)$ naar ∞ . De convergentiestraal is dus juist 1.

De studenten die de Stelling van Taylor gebruikten om te argumenteren dat de convergentiestraal minstens 1 is, gaven niet altijd een goed argument om af te leiden dat ze niet groter dan 1 kan zijn.

Vraag 4.

Ik realiseer me dat het niet zo duidelijk is voor studenten wat en hoe hier precies moet geantwoord worden en dat er verschillende interpretaties mogelijk zijn.

Het was zeker niet de bedoeling om het bewijs van het maximum modulus principe over te nemen en dan gewoon te vertellen waar de identiteitsstelling nu gebruikt werd. Een

groot deel van de antwoorden kwam daar op neer - waarbij dikwijls zelfs niet meer uitleg gegeven werd. Je mocht je dus zeker beperken tot die twee stukjes van het bewijs waar dit gebeurt. Een deel van de studenten heeft dit gedaan en dat is beter.

Een mogelijk goed antwoord zou er dan zo uitzien:

De identiteitsstelling wordt in het bewijs van het maximum modulus principe twee keer gebruikt. In het eerste geval is er gegeven dat $f(z) = 0$ voor z in een open schijfje rond z_0 en wordt daaruit afgeleid dat $f = 0$ in gans het domein Ω . In het tweede geval wordt er verkregen dat $f(z) = f(z_0)$, weer in een open schijfje rond z_0 waaruit dan wordt afgeleid dat $f(z) = f(z_0)$ voor alle z in het domein. Dit volgt inderdaad telkens uit het maximum modulus principe en het argument is in beide gevallen bijna hetzelfde. In het eerste geval past men de stelling toe op f en in het tweede geval op de functie $z \mapsto f(z) - f(z_0)$. Telkens is de functie gelijk aan 0 op een open schijf en in een open verzameling is elk punt een ophopingspunt. Dat is de eerste voorwaarde die nodig is om de identiteitsstelling te gebruiken. Uiteindelijk is ook het domein Ω samenhangend. Dat is de tweede voorwaarde. De identiteitsstelling levert dan dat de functie overal 0 is. In het eerste geval geeft dit $f(z) = 0$ en in het tweede geval $f(z) = f(z_0)$ voor elke $z \in \Omega$.

Slechts sommige studenten hebben benadrukt dat de toepassing in beide gevallen essentieel hetzelfde is. En bijna geen studenten hebben iets gezegd over de tweede voorwaarde die nodig is om de identiteitsstelling te gebruiken, namelijk dat het domein Ω samenhangend is.

Vraag 5.

Voor deze vraag moest je essentieel drie dingen doen. Vooreerst moest je de 4 oplossingen geven van de vergelijking $z^4 + 1 = 0$. De enige twee die binnen de kromme liggen voor R voldoende groot zijn $\exp(\frac{\pi i}{4})$ en $\exp(\frac{3\pi i}{4})$. De residu's in die punten kun je dan eenvoudig berekenen met behulp van de regel van de l'Hôpital omdat het gaat over enkelvoudige polen. Dan moet je opmerken dat de integraal over de halve cirkel naar 0 gaat voor $R \rightarrow \infty$. En als je dan geen fouten maakt bij de berekeningen kom je als resultaat $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ uit.

De meeste studenten bekomen de goede nulpunten, maar sommige schrijven toch iets met $\sqrt{i}$ wat eigenlijk niet goed gedefinieerd is. Dat mag dus niet. Bij de afschatting zijn er toch nog vele studenten die dit verkeerd doen en iets uitkomen met $R^4 + 1$ in de noemer i.p.v. $R^4 - 1$. Dat zou niet meer mogen gebeuren in het derde jaar. En verder wordt er nogal eens verkeerd gerekend. Als je bijvoorbeeld een resultaat uitkomt dat niet reëel is of wel reëel maar niet positief, dan weet je dat je een fout hebt gemaakt.

Vraag 6.

Deze vraag was min of meer een 'weggever'. Je moest vooral argumenteren waarom en hoe het maximummodulus principe werd toegepast. En verder wat werken met ongelijkheden. Een meer uitgewerkt bewijs kon je bijvoorbeeld vinden in mijn eigen nota's, deel 3, sectie 2. En als ik het goed begrepen heb, heeft Kenny dit ook nog eens uitgelegd in de les.

Vraag 7.

De gevraagde functie is een samenstelling van vier functies. De eerste is eenvoudigweg de functie $z \mapsto \frac{z}{r_1}$ die D_{r_1} herschaalt naar D_1 . De tweede functie gaat van D_1 naar D_1 en stuurt het punt $c = \frac{a}{r_1}$ naar 0. Deze heeft het voorschrift

$$z \mapsto \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}.$$

De twee volgende zijn dan de inversen van analoge functies, de ene die D_{r_2} schaalt naar D_1 en de andere die dan het punt $d = \frac{b}{r_2}$ naar 0 stuurt. Je kan deze inverse functies nog uitrekenen en dan ook de samenstelling expliciet opschrijven. Maar dat laatste vond ik al niet meer zo belangrijk, dat is gewoon rekenwerk. Belangrijk zijn de ideeën om aan deze concrete functie te geraken.

Maandag, 1 juli 2008.

Puntenverdeling:

20	
19	+
18	
17	++
16	
15	++
14	
13	
12	++++++++
11	++
10	+
9	
8	+++++
7	+
6	
5	+
4	
3	
2	
1	
0	+

Aantal geslaagden: 16 / 24
Gemiddelde: 11 / 20

- (1) Beschouw een gesloten kromme γ in $\mathbb{C}$. Het winding getal $n(\gamma, z_0)$ is dan gedefinieerd voor alle punten z_0 van $\mathbb{C}$ die niet op γ liggen. Wat kun je zeggen over het verband tussen het windinggetal van twee punten z_1 en z_2 die precies gescheiden zijn door een stukje van de kromme:

Probeer beknopt te argumenteren, zo correct mogelijk, maar toch zonder je te verliezen in al te veel technische details.

- (2) Veronderstel dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie is met compacte drager in $\mathbb{R}$. Definieer dan de complexe Fourier getransformeerde $\hat{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itz} dt.$$

Bewijs dat $\hat{f}$ analytisch is.

- (3) Beschouw de functie f gedefinieerd voor $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ door

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+1)}.$$

Wat kun je dan zeggen over de convergentiestraal van de Taylor ontwikkeling van deze functie rond het punt $z_0 = i$?

- (4) In de nota's van Ash en Novinger wordt de identiteitsstelling bewezen in Item 2.4.8 van Hoofdstuk 2 (The Identity Theorem). Leg eens uit, zoveel mogelijk met je eigen woorden, hoe dit resultaat verder gebruikt wordt om het maximum modulus principe te bewijzen in Item 2.4.12.

- (5) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

door gebruik te maken van de residustelling. Aanwijzing: Gebruik de gesloten kromme die bestaat uit het lijnstuk $[-R, +R]$ op de reële as en de halve cirkel in het bovenste halfvlak met middelpunt 0 en straal R . Probeer zo efficiënt mogelijk te rekenen.

- (6) Bewijs het volgende resultaat: Veronderstel dat W een open deelverzameling is van $\mathbb{C}$ en $z_0 \in W$. Indien $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch is en $f'(z_0) \neq 0$, dan bestaat er een open

omgeving V van z_0 in W zodat $f(V)$ open is. Dit wordt kort bewezen in de Werktekst 8. Werk dit bewijs meer in detail uit.

- (7) Beschouw de open schijven $D_r = \{z \mid |z| < r\}$ voor $r > 0$. Neem twee stralen r_1 en r_2 en een punt $a \in D_{r_1}$ en $b \in D_{r_2}$. Omwille van het Riemann mapping theorema bestaat er een analytische functie f op D_{r_1} die D_{r_1} bijjectief afbeeldt op D_{r_2} en zodanig dat $f(a) = b$. Kun je zo'n functie expliciet geven?

Veel geluk