

Bespreking van het examen Complexe Analyse

De examenvragen vind je op het einde van dit documentje.

Eerst een paar algemene opmerkingen.

Zoals ik ook al bij vorige besprekingen heb geschreven worden vele antwoorden toch nog slordig opgeschreven. Dat maakt het lezen en verbeteren niet aangenaam en zelfs moeilijker. Ik begrijp dat er onder tijdsdruk moet gewerkt worden en dat je dikwijls geen tijd hebt om antwoorden eerst in het klad volledig af te werken en dan netjes over te schrijven. Maar toch ... iets meer zorg zou beter zijn.

Dikwijls wordt er meer opgeschreven dan nodig is. Indien studenten zich wat meer zouden beperken tot wat essentieel is, zou er misschien ook wat meer tijd zijn om de antwoorden netjes neer te schrijven.

De antwoorden zijn dikwijls ook weinig logisch gestructureerd. Dit hangt samen met de twee vorige opmerkingen. Ik kom daar straks op terug wanneer ik vraag per vraag bespreek en illustreer het dan met voorbeelden.

Vele vragen hielden verband met oefeningen die gemaakt werden. In de mate dat de vraag niet afweek van het probleem dat opgelost werd in de oefeningen, wordt de vraag goed beantwoord. Maar wanneer de vraagstelling een beetje anders was, dan gebeurde dit al veel minder. Dit doet bij mij vragen rijzen omtrent de manier waarop je met de oefeningen (en de gegeven oplossingen) omgaat. Ik heb wel de indruk dat er aan gewerkt is, maar ik weet niet of dit altijd op de goede manier gebeurt?

Vraag 1.

We weten dat een machtreeks uniform convergeert in elke gesloten schijf met een straal die strikt kleiner is dan de convergentiestraal. Neem nu een willekeurige gesloten kromme γ in de open schijf. Omdat het beeld van γ gesloten is en begrensd, moet het liggen in een gesloten schijf binnen de open schijf. Daar convergeert de machtreeks uniform en mogen we dus integraal en limiet verwisselen. Aangezien de integraal van elke veelterm 0 oplevert, zal dat ook in de limiet 0 geven.

Nogal wat studenten vertrekken hier op een verkeerde manier. Men schrijft bijvoorbeeld dat de functie analytisch is en dus een Taylorontwikkeling heeft. Dit doet hier niets terzake. De machtreeks is immers gegeven. Ook wordt er geargumenteed dat een kromme te benaderen is door veelhoeken. Dit is niet nodig want er was gegeven dat de integraal over een gesloten kromme van een veelterm nul is. Soms wordt er nog eens geargumenteed waarom de integraal van een veelterm 0 is. Ook dat was niet nodig. En dan zijn er nog altijd enkele studenten die er van uitgaan dat de machtreeks overal uniform convergeert.

Er zijn dus te veel studenten die hier niet het essentiële opmerken en overbodige dingen argumenteren. Het gemiddelde op deze vraag was dan ook maar 2.1 op 5.

Vraag 2.

Deze vraag werd behandeld in de les en in oefeningenzittingen. En dat is te merken aan de antwoorden. Ze lijken allemaal op elkaar. Ik had wat meer creativiteit verwacht. Bijna niemand doet een poging om wat af te wijken van de gegeven oplossing. Ook niet om wat meer commentaar te geven. Waarom bijvoorbeeld ga je het interval $[0, 2\pi]$ opsplitsen in 3 stukjes? Sommige studenten zeggen wel dat er een probleem is in 0 en in 2π , maar leggen niet uit wat het probleem is. Waarom kan je geen uniforme convergentie toepassen? En dan is er op het einde nog het gebruik van $\limsup$. Ik vroeg me bij het verbeteren af hoeveel studenten er echt weten waarom je dit gebruikt? Misschien had ik dit echter moeten duidelijk maken bij de vraagstelling?

De gemiddelde score is 4.0 op 5, vrij hoog dus om voor de hand liggende redenen.

Vraag 3.

Deze vraag is een uitbreiding van een vraag van vorig jaar die je terugvindt in de tekst over het examen van vorig jaar ('Enkele bedenkingen bij het examen complexe analyse'). De analytische uitbreiding verkrijg je natuurlijk door in de integrand reeds $x \in \mathbb{R}$ door $z \in \mathbb{C}$ te vervangen. Analyticiteit bewijs je dan gewoon door de stelling van Morera en het verwisselen van integralen (zoals we al dikwijls gedaan hebben). Indien nu $\hat{f}$ compacte drager zou hebben in $\mathbb{R}$, dan moet $\hat{f} = 0$ omwille van de identiteitsstelling. Dit impliceert dat $f = 0$. Voor dit laatste heb je wat kennis van Fourieranalyse nodig.

Er was enige verwarring mogelijk omtrent de vraagstelling. Sommige studenten hebben aangenomen dat de Fouriergetransformeerde, na uitbreiding tot $\mathbb{C}$, compacte drager had. Dan werd de stelling van Liouville gebruikt. Wanneer je echter de vraag correct leest, dan zie je dat dit niet bedoeld is. In de vraag wordt $\hat{f}$ gedefinieerd op $\mathbb{R}$ en niet op $\mathbb{C}$ en als er dus staat dat '... $\hat{f}$ alleen maar compacte drager kan hebben ...', dan kan dit alleen gaan over de gedefinieerde functie op $\mathbb{R}$.

Het gemiddelde op deze vraag was 2.5 op 5.

Vraag 4.

Deze vraag verwijst o.a. naar de oefeningenzitting over essentiële singulariteiten. En dat is te merken aan de antwoorden. Maar tergelijktijd is de vraag niet als dusdanig aan bod geweest in die oefeningenzitting, en ook dat is te merken aan de antwoorden - dit in tegenstelling met de tweede vraag.

Een correct en goed gestructureerd antwoord begint met uit te leggen waarom de functie, bepaald door de machtreeks een singulariteit heeft op ∞ . Daarna wordt geargumenteed waarom dit een essentiële singulariteit moet zijn. Dan moet je verwijzen naar de Propositions 4.3 tot 4.5 in deel 2 van de nota's. Vooraleer je dat doet, moet je nog samenstellen met de functie $z \mapsto \frac{1}{z}$ waardoor je een essentiële singulariteit in 0 krijgt en je die resultaten dan ook kan toepassen. Uiteindelijk moet je dan deze resultaten weer terug vertalen naar de oorspronkelijke machtreeks. Zo krijg je bijvoorbeeld dat de machtreeks niet kan convergeren voor $z \rightarrow \infty$. Je kan terloops opmerken dat voor een veelterm dit naar ∞ convergeert. Maar belangrijk was om te vermelden dat je alle waarden van $\mathbb{C}$ kan

benaderen. Je moest de eigenschap in Propositie 4.5 nauwkeurig herformuleren voor die machtreeks.

Uiteindelijk moest je dit nog illustreren met een voorbeeld. En weer moet je de vraag goed lezen. Je voorbeeld moet het gedrag op oneindig illustreren. Je moet dus meer doen dan gewoon een voorbeeld geven van een machtreeks met oneindige convergentiestraal die geen veelterm is - dat is trouwens niet moeilijk. Je kon hiervoor $z \mapsto \exp(z)$ gebruiken. En dan bijvoorbeeld het feit dat deze functie periodiek is en het beeld gans $\mathbb{C}$ is, uitgenomen 0.

Het gemiddelde op deze vraag was maar 1.8 op 5. Dat is in feite merkwaardig omdat het een vraag betrof die je goed kon beantwoorden met het materiaal dat je gezien had in de oefeningen.

Vraag 5.

Dit is een toepassing van het Riemann mapping theorema. De oefening werd gemaakt in een van de oefeningenzittingen.

Om het bestaan van de functie te bewijzen moest je gewoon twee keer het Riemann mapping theorema gebruiken om twee functies f_1, f_2 te vinden die W_1 en W_2 respectievelijk naar de eenheidsschijf oversturen. Dan neem je de samenstelling van de ene met de inverse van de andere. Je gebruikt het open mapping theorema om aan te tonen dat die inverse nog analytisch is en zo bekom je een analytische functie f die W_1 bijtief afbeeldt op W_2 . Dit onderdeel was voor de meeste studenten geen probleem.

Maar met het opleggen van de extra voorwaarden ging het meestal mis. Er werden extra voorwaarden opgelegd op de samenstellende functies f_1, f_2 terwijl je de voorwaarde moet opleggen op de samengestelde functie f . De meest voor de hand liggende voorwaarde was dat je twee punten $z_1 \in W_1$ en $z_2 \in W_2$ neemt en eist dat $f(z_1) = z_2$ en dat $f'(z_1) > 0$. Door de uniciteit in het Riemann mapping theorema zelf te gebruiken, kun je dan ook aantonen dat zo'n f uniek is. Een paar studenten hebben dit correct gedaan.

Het gemiddelde voor deze vraag was 3.3 op 5.

Vraag 6.

Deze vraag verwijst naar de laatste oefeningenzitting.

De vraagstelling was duidelijk. Je moest drie dingen aantonen: (1) dat de functie begrensd is, (2) dat ze haar maximum bereikt en (3) dat dit gebeurt in een punt op de rand van S . Ik verwacht dan een antwoord op elk van die punten en liefst ook in die volgorde. Maar dit kwam maar weinig voor. Het lijkt er andermaal op dat wanneer ik de vraagstelling lichtjes wijzig, studenten al in de war zijn. Dit is vergelijkbaar met wat er bij vraag 4 gebeurde.

Om te bewijzen dat de functie begrensd is gebruik je bijvoorbeeld dat ze buiten een begrensde rechthoek in $\bar{S}$ kleiner is dan 1 omdat ze naar 0 convergeert op oneindig en dat ze als continue op een compacte, namelijk die begrensde rechthoek, begrensd is. Om te bewijzen dat ze haar maximum bereikt definieer je eerst het supremum M (wat bestaat omwille van het begrensd zijn) en kies je zo nodig een grotere rechthoek waarbuiten de

functie kleiner is dan bijvoorbeeld $M/2$. Binnen die rechthoek bereikt de functie haar maximum en omwille van de keuze van die rechthoek is dat ook het maximum van de functie op gans $\bar{S}$. Uiteindelijk gebruik je het maximum modulus principe om te bewijzen dat de functie haar maximum op de rand bereikt. Als dat niet zo is, dan zou dit ergens in S gebeuren en dat kan niet tenzij de functie constant is in de omgeving van dat punt. Maar omdat de strip samenhangend is, moet de functie dan overal constant zijn (identiteitsstelling) en omdat ze naar 0 gaat op oneindig moet ze dan nul zijn. En dat geval is natuurlijk triviaal.

Het gemiddelde op deze vraag is ook maar 1.9 op 5.

Vraag 7.

Deze vraag gaat over de priemgetallenstelling. Ik had aangekondigd dat ik daar over een vraag zou stellen. Het betrof een uitwerking van een bewijs, iets waar men zich goed kan op voorbereiden.

Over het algemeen werd er goed geantwoord. Aantonen dat de functie bekomen door de integraal analytisch is, werd wel eens vergeten. En ook werden er dikwijls heel weinig woorden besteed om te argumenteren dat je wel degelijk een pool hebt, van eerste orde en dat het residu er 1 was. Daar had ik ook wel wat meer uitleg verwacht omdat ik nu niet zeker ben of dit wel goed begrepen is.

Het gemiddelde op deze vraag is 3.2 op 5.

Vrijdag, 26 juni 2009.

De resultaten:

20	
19	xx
18	xx
17	x
16	xx
15	xx
14	
13	x
12	
11	x
10	xxxxx
9	xxxx
8	
7	xxx
6	x
5	xx
4	x
3	x
2	
1	
0	

Hiermee komen we aan 16 geslaagden op 28, dat is 57% (en dat is natuurlijk erg laag). Het gemiddelde is 10.7 op 20. Er is een uitgesproken sterke groep (9 studenten met 15 of meer), er is een middengroep (10 studenten met 9 tot 11) en er is een zwakke groep (8 studenten met 7 of minder).

- (1) Beschouw een machtreeks rond z_0 met convergentiestraal ρ , strikt groter dan 0. Noteer met f de analytische functie op de open schijf $D(z_0, \rho)$ die daardoor bepaald wordt. Toon aan dat de integraal van f over een willekeurige gesloten kromme in $D(z_0, \rho)$ gelijk is aan 0, zonder te steunen op de stelling van Cauchy, maar door te gebruiken dat f kan benaderd worden door veeltermen en dat het resultaat gemakkelijk te bewijzen is voor veeltermen (cfr. het begin van Sectie 3 uit Deel 1 - dit moet je niet aantonen).
- (2) We hebben de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

berekend door te integreren over de kromme die je vindt by oefening 7 uit deel 1. Bewijs nauwkeurig dat de integraal over de grote halve cirkel naar 0 convergeert als $R \rightarrow \infty$ en bereken ook nauwkeurig de limiet van de integraal over de kleine halve cirkel wanneer $r \rightarrow 0$ convergeert.

- (3) Veronderstel dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie is met compacte drager in $\mathbb{R}$. Definieer de Fourier getransformeerde $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt.$$

Toon aan dat $\hat{f}$ analytisch kan uitgebreid worden tot gans $\mathbb{C}$ en leidt daaruit af dat $\hat{f}$ alleen maar compacte drager kan hebben indien $f = 0$. Merk op de $\hat{f} = 0$ impliceert dat $f = 0$ omdat f continu is (dit moet je niet aantonen).

- (4) Wat kun je zeggen over het gedrag op oneindig van een machtreeks (met oneindige convergentiestraal) die geen veelterm is (cfr. Sectie 4 uit Deel 2)? Argumenteer en geef eventueel een voorbeeld om het resultaat te bespreken.
- (5) Beschouw twee open, samenhangende, enkelvoudig samenhangende echte deelverzamelingen W_1 en W_2 van $\mathbb{C}$. Bewijs dat er een $f : W_1 \rightarrow W_2$ bestaat die analytisch is en bijtief. Kun je extra voorwaarden opleggen zodat er juist één dergelijke functie bestaat?
- (6) Beschouw de open strip $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < 1\}$ en de sluiting $\bar{S}$ van S . Veronderstel dat $f : \bar{S} \rightarrow \mathbb{C}$ continu is en naar 0 convergeert als $z \rightarrow \infty$ in $\bar{S}$. Veronderstel verder dat f analytisch is in S . Toon aan dat de functie f begrensd is, haar maximum bereikt en dit in een punt van $\bar{S} \setminus S$ (cfr. de laatste oefeningenzitting). Argumenteer voldoende en schrijf je argumenten nauwkeurig en volledig uit.
- (7) In de tekst over de priemgetallenstelling wordt de ζ -functie aanvankelijk gedefinieerd voor $\text{Re}(z) > 1$ (cfr. Definitie 1.1) en achteraf uitgebreid tot $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0 \text{ en } z \neq 1\}$ (cfr. Stelling 1.4). Verder wordt nog aangetoond dat deze uitbreiding een pool heeft van eerste orde in $z = 1$ en het residu er 1 is. Werk het bewijs van dit resultaat wat verder uit (en toon daarmee aan dat je dit goed begrijpt). Maak ook wat extra bedenkingen.

Succes!