Examen Algebraïsche Structuren 22 juni 2016

22 juni 2016

1 Theorie

1.1 Vraag 1

Geef en bewijs de stelling van Sylvester

1.2 Vraag 2

Zij n en $m \in \mathbb{N}_0$. Onder welke voorwaarden is $\theta : \mathbb{Z}_{nm} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m : [x]_{nm} \mapsto ([x]_n, [x]_m)$ een isomorfisme van ringen. Bewijs.

2 Oefeningen

2.1 Vraag 3

Toon aan dat voor alle $a \in \mathbb{Z}$ a^{25} mod $65 = a$ mod 65

2.2 Vraag 4

Zij $G, *$ een groep en H_1, H_2 deelgroepen van G. Definieer $H_1H_2 = \{x * y \mid x \in H_1, y \in H_2\}$.

a) Geef een voorbeeld van een groep met deelgroepen zodat $H_1H_2 \neq H_2H_1$.

Vanaf nu nemen we aan dat $G, *$ commutatief is.

b) Bewijs dat H_1H_2 een deelgroep is.

c) Beschouw nu het direct product op H_1 en H_2 met gepaste operatie. Dan is er een deelgroep $H^{'} = \{(x, x) \mid x \in H_1 \cap H_2\}$. (Niet te bewijzen). Toon aan dat er een isomorfisme bestaat tussen $(H_1 \times H_2)\backslash H^{'}$ en H_1H_2.

2.3 Vraag 5

Zij V een eindigdimensionale vectorruimte over een veld K en $\mathcal{V}$ een basis voor V. We kennen dan het isomorfisme $iso_{\mathcal{V}} : V \to V^*$ en de duale hiervan. Verder kennen we ook het canonieke isomorfisme $\phi : V \to V^{**} : v \mapsto ev_v$.

a) Neem $V = \mathbb{R}^3$ en als basis $\mathcal{V} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$. Bekijk $l = iso_{\mathcal{V}}(v_1)$ en $l' = (iso_{\mathcal{V}})^*(\phi(v_1)$. In welke vectorruimte bevinden zich deze elementen? Bereken ook voor willekeurige (x, y, z) $l(x, y, z)$ en $l'(x, y, z)$.

b) Toon nu aan dat voor willekeurige vectorruimten geldt dat $iso_{\mathcal{V}} = (iso_{\mathcal{V}})^* \circ \phi$.