Oefeningenexamen Differentiaalvergelijkingen, deel 1
9 november 2021

Beste student,

Dit oefeningenexamen bevat twee oefeningen betreffende het eerste deel van de cursus Differentiaalvergelijkingen.

Schrijf op elk blad dat je afgeeft je naam (ook op het voorblad)!

Je mag je cursustekst gebruiken, maar geen aparte bladen met uitgewerkte oefeningen. Ook een rekenmachine (geen GSM of smartphone) is toegelaten. Geef het antwoordblad af waarbij je zoveel bladen mag toevoegen als je nodig hebt. Deze oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Vraag 1: Gegeven het volgende Lotka-Volterra systeem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = -5y + xy \end{cases}$$

a) *(0.5 pt.)* Is dit systeem jager-prooi, competitief of samenwerkend?

b) *(3 pt.)* Vind de drie kritieke punten van het systeem en bepaal hun aard.

c) *(1.5 pt.)* Maak een schets van het faseportret in het eerste kwadrant. Stel dat op tijd $t = 0$ de populatie gegeven is door (4, 10), hoe zal de populatie evolueren in de tijd?

Oplossing

a) Jager-prooi

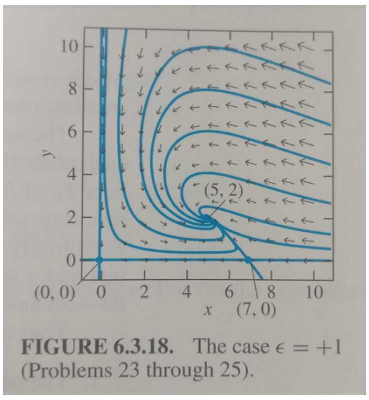
b) De kritieke punten zijn (0,0), (7,0) en (5, 2).

(0,0): Zadelpunt met eigenwaarden $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -5$ en bijhorende eigenvectoren $v_1 = (1, 0)$ en $v_2 = (0, 1)$.

(7,0): Zadelpunt met eigenwaarden $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 2$ en bijhorende eigenvectoren $\lambda_1 = (1, 0)$ en $\lambda_2 = (9, -7)$.

(5,2): Stabiel spiraalpunt met eigenwaarden $\lambda_\pm = 0.5(-5 \pm i\sqrt{15})$.

c) De populatie zal convergeren naar het stabiele spiraalpunt (5, 2):



Figuur 1: Faseportret vraag 1

Vraag 2: Gegeven de volgende differentiaal vergelijking:

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0, \qquad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

a) *(2 pt.)* Vind de recursie voor de coëfficiënten a_k van de machtreeksoplossing

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

b) *(1 pt.)* Los de recursie voor de a_k op.
NB: Als je de voorgaande opgave niet opgelost hebt, mag je de onderstaande alternatieve recursie gebruiken. Graag duidelijk aangeven als je dit doet!

$$a_{k+2} = \frac{(k+5)(k+2) - (n+2)(n+5)}{(k+3)(k+5)} a_k$$

c) *(1 pt.)* Er is een *veeltermoplossing*. Waar kunnen we dat aan zien?

d) *(1 pt.)* Neem nu $n = 0$. Dan is de constante functie een oplossing. De andere lineair onafhankelijke oplossing is een reeks die niet afbreekt. Voor welke x convergeert deze *niet-veeltermoplossing* in elk geval?

Oplossing

a) We nemen de machtreeksoplossing rond 0 en zijn afgeleides

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k,$$

die we in de differentiaal vergelijking invullen. Vervolgens kijken we naar gelijke machten van x om op de volgende recursie te komen voor $k \in \mathbb{N}$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 3ka_k + n(n+2)a_k = 0.$$

Dus als de parameters a_0 en a_1 gegeven zijn, dan staat de rest van de oplossing vast. We herschrijven dit naar

$$a_{k+2} = \frac{k(k+2) - n(n+2)}{(k+2)(k+1)} a_k = \frac{(k-n)(k+n+2)}{(k+2)(k+1)} a_k \tag{1}$$

b) Dus dan hebben we voor $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(2k-n-2)(2k+n)}{2k(2k-1)} a_{2k-2} \\ &= 2^{2k} \frac{(k - \frac{n+1}{2})(k + \frac{n}{2}) \dots (-n/2)(1+n/2)}{(2k)!} a_0 \\ &= 2^{2k} \frac{(-n/2)_k (1+n/2)_k}{(2k)!} a_0, \end{aligned}$$

en voor $k \geq 1$

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-n-1)(2k+n+1)}{(2k+1)(2k)} a_{2k-1} \tag{2}$$
$$= 2^{2k} \frac{(k - \frac{n+1}{2})(k + \frac{n+1}{2}) \ldots (\frac{1}{2} - \frac{n}{2})(1 + \frac{n+1}{2})}{(2k+1)!} a_1$$
$$= 2^{2k} \frac{(\frac{1}{2} - \frac{n}{2})_k (1 + \frac{n+1}{2})_k}{(2k+1)!} a_1.$$

En dan blijven a_0 en a_1 over als vrije parameters.

c) In vergelijking (1) zien we dat het rechter lid 0 wordt als $k = n$. Als n even is zullen alle a_k met even $k > n$ dus 0 worden. Vice versa als n oneven is.

Als we nu als basisoplossingen de oplossing met alleen even machten en de oplossing met alleen oneven machten nemen, dan is altijd één van die twee machtreeksen eentje die afbreekt en een veelterm van graad n wordt.

d) Als we de convergentiestraal niet willen uitrekenen kunnen we ook zien dat het singuliere punt dichtstbij $x = 0$ het punt $x = 1$ is. Dus dan hebben we in elk geval convergentie voor $|x| < 1$. Dit is al genoeg voor het punt van d).

Maar we kunnen ook de convergentiestraal uitrekenen, en dat gaat makkelijker als $n = 0$. Als $n = 0$ dan is de veeltermoplossing $y_1(x) = a_0$ en een andere oplossing is

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

We gebruiken dan de ratio test. We hebben absolute convergentie als $L < 1$ en divergentie als $L > 1$, waarbij

$$L = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{2k+1} x^{2k+1}}{a_{2k-1} x^{2k-1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{2k-1}{2k} x^2 = x^2.$$

We hebben hier gebruikt gemaakt van de recursie in de vorm (2). Dus dan hebben we absolute convergentie voor $|x| < 1$, en dus een convergentiestraal van 1.

We kunnen de uitdrukking voor a_{2k+1} als $n = 0$ nog een klein beetje versimpelen door gebruik te maken van $(2k+1)! = 2^{2k} k! (1/2)_k$. Dan houden we over

$$a_{2k+1} = \frac{(3/2)_k}{k!} a_1.$$