Naam:

Oefeningenexamen Differentiaalvergelijkingen, deel 2
21 december 2021

Beste student,

Dit oefeningenexamen bevat twee oefeningen betreffende het tweede deel van de cursus Differentiaalvergelijkingen.

Schrijf op elk blad dat je afgeeft je naam (ook op het voorblad)!

Je mag je cursustekst gebruiken, maar geen aparte bladen met uitgewerkte oefeningen. Ook een rekenmachine (geen GSM of smartphone) is toegelaten. Geef het antwoordblad af waarbij je zoveel bladen mag toevoegen als je nodig hebt. Deze oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Naam:

Vraag 1: Beschouw het Sturm-Liouville probleem

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad \cos(\alpha)y(0) + \sin(\alpha)y'(0) = 0, \qquad y(L) = 0,$$

voor $x \in [0, L]$ en met $\alpha \in (-\pi, \pi]$ en $L > 0$.

a) *(2 pt.)* Neem $\lambda = 0$. Vind een verband tussen de parameters L en α zodat er een *niet-triviale* oplossing bestaat.

b) *(2 pt.)* Neem nu $\lambda = k^2 > 0$. Leid af dat k, voor $\alpha \notin \{0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi\}$, een oplossing moet zijn van

$$\tan(kL) = k\tan(\alpha).$$

Schrijf ook de bijbehorende eigenfuncties op in termen van k_n.

c) *(1 pt.)* Wat gebeurt er als *wel* $\alpha \in \{0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi\}$?

Naam:

Oplossing

a) Voor $\lambda = 0$ hebben we

$$y'' = 0,$$

dus dan is

$$y(x) = Ax + B.$$

De randvoorwaarde zijn dus

$$\begin{aligned} A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha) &= 0, \\ AL + B &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we vinden dat

$$A(\sin(\alpha) - L\cos(\alpha)) = 0.$$

Als $A = 0$ dan ook $B = 0$. Dat willen we niet, dus moet

$$L\cos(\alpha) = \sin(\alpha).$$

Deze vergelijking heeft geen oplossingen als $\alpha \in \{0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Anders hebben we als oplossing

$$y(x) = A(x - L).$$

b) & c) Schrijf $\lambda = k^2 > 0$. Dan hebben we zoals gewoonlijk

$$y(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx).$$

De randvoorwaarden zijn dan

$$\begin{aligned} Ak\sin(\alpha) + B\cos(\alpha) &= 0, \\ A\sin(kL) + B\cos(kL) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vanaf hier kunnen we twee equivalente routes betreden.

(route 1) Als $\alpha \notin \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ mogen we delen door $\cos(\alpha)$ en leiden de randvoorwaarden tot

$$A\left(\sin(kL) - k\tan(\alpha)\cos(kL)\right) = 0.$$

Als we nu $A = 0$ (met de huidige restrictie op α) nemen komen uit op de triviale oplossing. Met $A \neq 0$ dan voldoet k aan

$$\tan(kL) = k\tan(\alpha).$$

Als we k_n de n-de positieve oplossing van deze vergelijking noemen, krijgen we de volgende eigenfuncties

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \sin(k_n x) - k_n\tan(\alpha)\cos(k_n x) \\ &= \sin(k_n x) - \tan(k_n L)\cos(k_n x) \\ &= \sec(k_n L)\left(\cos(k_n L)\sin(k_n x) - \sin(k_n L)\cos(k_n x)\right) \\ &= \sec(k_n L)\sin(k_n(x - L)). \end{aligned}$$

De bovenstaande uitdrukkingen zijn ieder voldoende en andere equivalente uitdrukkingen/normalizaties ook.

Merk op dat deze k_n en y_n versimpelen voor $\alpha \in \{0, \pi\}$. Dan krijgen we

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dan zijn de eigenfuncties

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Als we nu *wel* $\alpha \in \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ hebben, dan volgt meteen uit (1) dat $A = 0$. Nu versimpelen de randvoorwaarden

$$B\cos(kL) = 0.$$

Dan krijgen we dus

$$k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dan zijn de eigenfuncties

$$y_n(x) = \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right).$$

(route 2) Als $\alpha \notin \{0, \pi\}$ mogen we delen door $\sin(\alpha)$ en leiden de randvoorwaarden tot

$$B\left(\cos(kL) - \frac{1}{k}\cot(\alpha)\sin(kL)\right) = 0.$$

Als we nu $B = 0$ (met de huidige restrictie op α) nemen komen uit op de triviale oplossing. Met $B \neq 0$ dan voldoet k aan

$$\cot(kL) = \frac{1}{k}\cot(\alpha).$$

Als we k_n de n-de positieve oplossing van deze vergelijking noemen, krijgen we de volgende eigenfuncties

$$\begin{aligned} y_n(x) &= -\cot(k_nL)\sin(k_nx) + \cos(k_nx) \\ &= -\frac{1}{k_n}\cot(\alpha)\sin(k_nx) + \cos(k_nx). \end{aligned}$$

Merk op dat deze k_n en y_n versimpelen voor $\alpha \in \{\pm\frac{\pi}{2}\}$. Dan krijgen we

$$k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dan zijn de eigenfuncties

$$y_n(x) = \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right).$$

Als we nu *wel* $\alpha \in \{0, \pi\}$ hebben, dan volgt meteen dat $B = 0$. Nu versimpelen de randvoorwaarden

$$A\sin(kL) = 0.$$

Dan krijgen we dus

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dan zijn de eigenfuncties

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Vraag 2: Gegeven de volgende diffusievergelijking voor de temperatuur van een staaf met lengte $L = 4$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= g(x) \\ u(0,t) &= -4 \\ u(4,t) &= 2 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

met $g(x) : [0,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto 8 - 3x^2$, en $f(x) : [0,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x$.

a) *(2 pt.)* Splits u op in een homogene oplossing u_h en stationaire oplossing u_s. Bepaal de stationaire oplossing u_s.

b) *(2 pt.)* Bepaal de nieuwe randvoorwaarden voor de homogene oplossing. Wat is de oplossing van u_h?

c) *(1 pt.)* Bepaal $u(x,t)$.

Oplossing

a) Splits $u(x,t) = u_h(x,t) + u_{st}(x)$. De nieuwe randvoorwaarden van $u_{st}(x)$ zijn

$$-\frac{\partial^2 u_{st}}{\partial x^2} = g(x) \tag{2}$$
$$u_{st}(0) = -4 \tag{3}$$
$$u_{st}(L) = 2 \tag{4}$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat

$$u_{st}(x) = -4x^2 + x^4/4 + Ax + B$$

Invullen van de randvoorwaarden geeft de particuliere oplossing:

$$u_{st}(x) = \frac{x^4}{4} - 4x^2 + \frac{3}{2}x - 4$$

b) Homogene oplossing. De nieuwe randvoorwaarden voor $u_h(x,t)$ zijn

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$
$$u_h(0,t) = 0 \tag{6}$$
$$u_h(L,t) = 0 \tag{7}$$

We lossen dit op met scheiding van veranderlijken: $u_h(x,t) = X(x)T(t)$. Dit geeft de vergelijkingen

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) - \lambda T(t) &= 0. \end{cases}$$

De oplossing van X vinden we door het Sturm-Liouville probleem op te lossen. Er zijn geen oplossingen voor negatieve lambda of $\lambda = 0$. Voor positieve lambda vinden we als oplossing

$$X_n(x) = \{B_n \sin(\lambda_n x) | \lambda_n = \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

De oplossing van $T_n(t) = C_n \exp(-\lambda_n t)$. De oplossing van u_h is dus gegeven door

$$u_h(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \sin(\frac{n\pi}{4}x)\exp(-(\frac{n\pi}{4})^2 t)$$

c) Totale oplossing

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_h(x,t) + u_{st}(x) \\ &= \frac{x^4}{4} - 4x^2 + \frac{3}{2}x - 4 + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \sin(\frac{n\pi}{4}x)\exp(-t(\frac{n\pi}{4})^2) \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_0^4 ((\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x) - (\frac{x^4}{4} - 4x^2 + \frac{3}{2}x - 4))\sin(\frac{n\pi}{4}x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 (4x^2 + 4)\sin(\frac{n\pi}{4}x)dx \\ &= \frac{8}{\pi n}(1-(-1)^n) + 2\int_0^4 x^2 \sin(\frac{n\pi}{4}x)dx \\ &= \frac{8}{\pi n}(1-(-1)^n) - \frac{128}{\pi n}(-1)^n - \frac{256}{\pi^3 n^3}(1-(-1)^n) \\ &= \frac{8}{\pi n}(1-17(-1)^n) + ((-1)^n - 1)\frac{256}{\pi^3 n^3} \\ &= \frac{8}{\pi n}\left((1-17(-1)^n) + \frac{32}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1)\right) \end{aligned}$$