Differentiaalvergelijkingen
examen 20 januari 2009

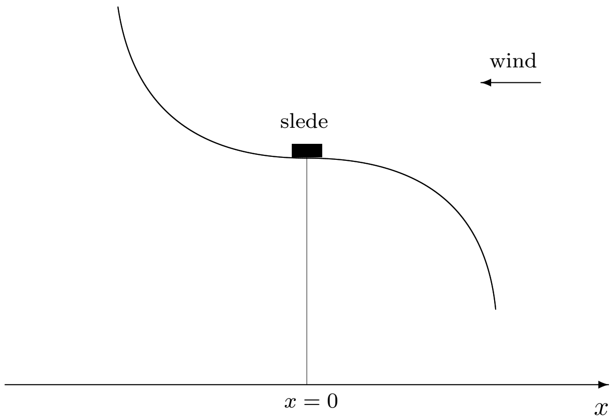
Theorie Van Assche

$\boxed{1}$ De oplossingen van een lineair stelsel van twee eerste orde DV's zijn gegeven als

$$\mathbf{x}_1 = (t, 1)^T \quad \text{en} \quad \mathbf{x}_2 = (t^2, 2t)^T.$$

Bepaal de Wronskiaan van deze oplossingen. Zijn deze oplossingen lineair onafhankelijk? Hoe kan je de Wronskiaan gebruiken om iets te zeggen over de coëfficiënten van het stelsel? Bepaal deze coëfficiënten expliciet.

$\boxed{2}$



Beschouw een slede op een helling zoals op bovenstaande figuur weergegeven. Veronderstel dat de slede een massa gelijk aan 1 heeft. De wind werkt op de slede met een constante kracht 24. De slede wordt op de helling voorwaarts versneld met een vergelijking die beschreven wordt aan de hand van 6 maal het kwadraat van de afstand tot de oorsprong.

Schrijf de bewegingsvergelijking van het systeem op, en vorm deze om tot een stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen. Bepaald hiervan de kritieke punten en het verloop van de oplossing hierrond. Schets een faseportret en duidt hierop de oplossingskrommen aan. Bepaal een expliciete uitdrukking voor de oplossingskrommen.

Theorie Fannes

$\boxed{1}$ We werken in drie dimensies. Bewijs dat voor een functie f beschreven in sferische coördinaten die enkel afhangt van de voerstraal, de driedimensionale Fouriertransformatie en haar inverse van de volgende vorm zijn:

$$\widehat{f}(\kappa) = \frac{2}{\kappa}\int_0^\infty dr\ r\ f(r)\sin(2\pi\kappa r) \quad \text{en} \quad f(r) = \frac{2}{r}\int_0^\infty d\kappa\ \kappa\ \widehat{f}(\kappa)\sin(2\pi\kappa r).$$

Beschouw de functie u als oplossing van de warmtevergelijking

$$u(r,t) = \frac{2}{r}\int_0^\infty d\kappa\ \kappa\ c(\kappa,t)\sin(2\pi\kappa r).$$

Aan welke vergelijking moet $c(\kappa, t)$ voldoen?

$\boxed{2}$ Los de vergelijking van Laplace $\Delta u = 0$ op in de cirkelsector met $r < R$ en $0 \leq \theta \leq \alpha$. Neem aan dat op de stralen $\theta = 0$ en $\theta = \alpha$ u gelijk is aan nul en dat op de rand van de cirkelsector de functie $u(R, \theta) = \phi(\theta)$ met ϕ een stuksgewijs gladde functie.

Oefeningen

$\boxed{1}$ Beschouw de differentiaalvergelijking

$$xy'' + \alpha y' - y = 0,$$

waarbij α reëel is.
Welk soort punt is $x = 0$? Geef de Frobenius-indices van deze vergelijking.
Bepaal de waarden van α waarvoor we een machtreeksoplossing van de vorm

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad c_0 \neq 0$$

hebben. Wat is de convergentiestraal?
Neem $\alpha = 1$. Vind een machtreeksoplossing voor de differentiaalvergelijking die lineair onafhankelijk is met vorige oplossing. Reken de eerste drie termen hiervan uit.

$\boxed{2}$ Beschouw de differentiaalvergelijking

$$xy'' + \alpha y' - y = 0,$$

waarbij α reëel is. Neem aan dat we een oplossing hebben van de vorm

$$y(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tx}\, dt$$

met f een vooralsnog onbekende functie.
Stel dat f continu differentieerbaar is op $[0, \infty[$ en van exponentiële orde. Bewijs dat f dan moet voldoen aan de homogene eerste orde differentiaalvergelijking

$$t^2 f'(t) + (2 - \alpha) t f(t) - f(t) = 0.$$

Los deze differentiaalvergelijking op naar f.
Voldoet de zo gevonden uitdrukking voor y aan de eerste differentiaalvergelijking? Zijn de hierbovenstaande voorwaarden voor f allemaal noodzakelijk? Is f inderdaad van exponentiële orde, en zo ja, van welke orde?

⋆ ⋆ ⋆