1. (a) Toon aan dat de rationale functie

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 1}{2x^2}$$

(voor alle $x \neq 0$) bekomen wordt via volgende procedure: Start met een gelijkbenige rechthoekige driehoek OAB, met B het punt $(x, 0)$ op de x-as, O de oorsprong, en A het punt $(0, x)$ op de y-as. Bepaal het snijpunt E van de rechten $y = 1$ en de rechte AD, met D het vaste punt $(1, 0)$. Bepaal vervolgens de middelloodlijn van het lijnstuk AE. Het snijpunt van deze middelloodlijn met de verticale rechte door B bepaalt de lokale functiewaarde $f(x)$.

Uitwerking

- Wat verwarrend kan zijn in deze opgave, is dat voor de coördinaten van A en B de letter x gebruikt wordt. Zorg ervoor dat je onderscheid blijft maken tussen deze x en de eenheid van de horizontale as. Dit kun je bijvoorbeeld doen door de horizontale as de letter t te geven.
- Bepalen van snijpunt E:
  - Rechte door A en D heeft dan als vergelijking: $y = -xt + x$.
  - Snijpunt E van de rechte door A en D en de rechte $y = 1$: Los op $y = -xt + x \wedge y = 1$.
  - Dit geeft $E = \left(\frac{x-1}{x}, 1\right)$.
- Bepalen van vergelijking van middelloodlijn:
  - M.b.v. middelpunt M van AS en de richtingscoëfficiënt van AS:
    - De coördinaten van middelpunt M van AS zijn $\left(\frac{x-1}{2x}, \frac{1+x}{2}\right)$
    - De rico m van een rechte loodrecht op AS voldoet aan $m \cdot -x = -1$, dus $m = \frac{1}{x}$
    - Dus de vergelijking van de middelloodlijn:
      $y - \frac{1+x}{2} = \frac{1}{x} \cdot (t - \frac{x-1}{2x}) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \cdot (t - \frac{x-1}{2x}) + \frac{1+x}{2}$
  - Of m.b.v. gelijke afstand tot E en A:
    - Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn door te stellen dat de afstand tot E gelijk moet zijn aan de afstand tot A, d.m.v.:

$$\sqrt{\left(t - \frac{x-1}{x}\right)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(t)^2 + (y-x)^2}$$

- Het snijpunt van de middelloodlijn en de verticale rechte door $B(x, 0)$, vinden we door het volgende stelsel op te lossen: $y = \frac{1}{x} \cdot (t - \frac{x-1}{2x}) + \frac{1+x}{2} \wedge t = x$.
  Dit geeft $y = \frac{1}{x} \cdot (x - \frac{x-1}{2x}) + \frac{1+x}{2} = \frac{x^3+3x^2-x+1}{2x^2}$.
- Dus als dit snijpunt de waarde van $f(x)$ bepaalt, dan geldt $f(x) = \frac{x^3+3x^2-x+1}{2x^2}$

Puntenverdeling:

- Totaal: 1,5 pt
- Richtingcoëfficiënt rechte door A en D: 0,25 pt
- Coördinaten van E: 0,25 pt
- Vergelijking middelloodlijn: (0,25+0,25+0,25=) 0,75 pt
- Eindconclusie: 0,25 pt
- Aftrek: per rekenfout: -0,25 pt. Indien geen onderscheid tussen 'x' en 'x': -0,5 pt.

(b) Toon aan dat de gevonden functie $f(x)$ een schuine asymptoot heeft door de volgende limieten uit te rekenen:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$$

Uitwerking

- $f(x) = \frac{x^3+3x^2-x+1}{2x^2}$, so $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x^2-x+1}{2x^3} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3+3x^2-x+1}{2x^2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3+3x^2-x+1-x^3}{2x^2}\right] = \frac{3}{2}$
- De vergelijking van de asymptoot is dus $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Puntenverdeling:

- Totaal: 0,5 pt
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$: 0,25 pt
- $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3+3x^2-x+1}{2x^2} - \frac{1}{2}x\right] = \frac{3}{2}$: 0,25 pt
- Aftrek: per rekenfout: -0,25 pt.

(c) Bereken de raaklijn aan de grafiek van f, voor de x-waarde $x = 1$.

Uitwerking

- $f(x) = \frac{x^3+3x^2-x+1}{2x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2\cdot(3x^2+6x-1)-(x^3+3x^2-x+1)4x}{4x^4}$.
- $f'(1) = \frac{2\cdot(3+6-1)-(1+3-1+1)4}{4} = 0$.
- Vergelijking van de raaklijn f als $x = 1$ is $y = 2$

Puntenverdeling:

- Totaal: 0,5 pt
- $f'(x) = 0$: 0,25 pt
- $y = 2$: 0,25 pt
- Aftrek: per rekenfout: -0,25 pt.

(2.5 ptn)

2. Gegeven de functie $p(x) = x - 2\cot^{-1}(x)$.

   (a) Benoem het domein van de functie $p(x)$. Toon aan dat je het voorschrift van $p(x)$ kan herschrijven tot
$$p(x) = x - 2\sin^{-1}\left(\frac{\text{sgn}x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Uitwerking

- De inverse van de cotangens is als volgt gedefinieerd: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(\frac{1}{x})$.
  Domein van $y = \frac{1}{x}$ is $\mathbb{R}_0$, domein van $y = \tan^{-1}(x)$ is $\mathbb{R}$, dus het domein van $y = \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ en dus van $y = \cot^{-1}(x)$ is $\mathbb{R}_0$.
- Laat zien dat $p(x) = x - 2\sin^{-1}\left(\frac{\text{sgn}x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
  - Stel $y = \cot^{-1}(x)$, dan moet er gelden dat $y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
    We moeten laten zien dat $y = \sin^{-1}\left(\frac{\text{sgn}x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
    $y = \cot^{-1}(x) \Leftrightarrow \cot(y) = x \Leftrightarrow \frac{\cos(y)}{\sin(y)} = x$
    $\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{1-\sin^2(y)}}{\sin(y)} \cdot \text{sgn}(\cos(y)) = \frac{\sqrt{1-\sin^2(y)}}{\sin(y)}$, want $\cos(y) > 0$
    $\Rightarrow x^2 = \frac{1-\sin^2(y)}{\sin^2(y)} \Leftrightarrow x^2\sin^2(y) = 1 - \sin^2(y) \Leftrightarrow \sin^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$
    $\Leftrightarrow \sin(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \text{sgn}(\sin(y))$
    Omdat $\frac{\cos(y)}{\sin(y)} = (x)$ en $\cos(y) > 0$, weten we dat $\text{sgn}(\sin(y)) = \text{sgn}(x)$.
    Dus $\sin(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \text{sgn}(x) \Leftrightarrow y = \sin^{-1}\left(\frac{\text{sgn}(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Puntenverdeling:

- Totaal: 1,5 pt
- Domein is $\mathbb{R}_0$: 0,5 pt
- $p(x) = x - 2\sin^{-1}\left(\frac{\text{sgn}x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$: 1,0 pt
- Aftrek: per rekenfout: -0,25 pt, indien sgn$x$ niet verantwoord: -0,25 pt.

(b) Argumenteer dat $p(x)$ een oneven functie is.

Uitwerking

- $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(\frac{1}{x})$
- $y = \frac{1}{x}$ is oneven.
- $y = \tan^{-1}(x)$ is oneven.
- Een oneven functie toegepast op een oneven functie geeft een oneven functie, dus $\tan^{-1}(\frac{1}{x}) = \cot^{-1}(x)$ is oneven.

Puntenverdeling:

- Totaal: 0,5 pt
- Aftrek: Indien wel een argumentatie is gegeven voor $p(x)$ oneven is, maar er is niet helder gemotiveerd waarom $\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}(x)$: - 0,25 pt; indien foutieve bewering als $\cot^{-1}(x) = \frac{\cos^{-1}(x)}{\sin^{-1}(x)}$: -0.5 pt.

(c) Bereken de afgeleide $p'(-1)$.

Uitwerking $p(x) = x - 2\cot^{-1}(x)$.

Bereken $p'(-1)$.

- We weten dat $\frac{d}{dx}\cot^{-1}(x) = \frac{-1}{1+x^2}$, dus
- $p'(x) = 1 - 2\frac{-1}{1+x^2}$
- $p'(-1) = 1 - 2\frac{-1}{1+1} = 1 + 1 = 2$
- Alternatief: gebruik dat $p(x) = x - 2\sin^{-1}\left(\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, dat $(\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en dat je weet dat $\operatorname{sgn}(x)$ voor gegeven $x \neq 0$, beschouwd kan worden als een constante.

  De afgeleide wordt dan: $p'(x) = \left(x - 2\sin^{-1}\left(\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)' = 1 - 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{0 - \operatorname{sgn} x \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot 2x}{1+x^2} = 1 - 2\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{-\operatorname{sgn} x \cdot x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

  Dus $p'(-1) = 1 - 2\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-1}{(2)^{\frac{3}{2}}} = 2$

Puntenverdeling:

- Totaal: 0,5 pt
- $p'(x) = 1 - 2\frac{-1}{1+x^2}$: 0,25 pt.
- $p'(-1) = 2$: 0,25 pt. NB indien $p'(x)$ geheel fout, dan geen punten voor $p'(-1)$
- Aftrek: per rekenfout: -0,25 pt.

(2.5 ptn)

Opmerkingen

1a De grootste moeilijkheid in opgave 1a was het gebruik van de letter x voor de positie van A en B. Dit probleem kon verholpen worden door ofwel de coördinaten van A en B te noteren als bv $A(0, x_0)$ en $B(x_0, 0)$ ofwel door de eenheid van de horizontale as een andere letter te geven. Hierna leverde deze opgave weinig problemen meer op, op rekenfouten na.

1b en 1c Deze opgaven leverden weinig problemen op. De fouten die gemaakt werden, waren meestal het gevolg van slordig rekenen.

2a Het domein van de $\cot^{-1}(x)$ was voor veel studenten lastig. De inverse van de cotangens kan op meerdere manieren gedefinieerd worden. In het boek van deze cursus echter, wordt de volgende definitie gehanteerd: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, waarvoor moet gelden dat $x \neq 0$. Het domein is hiermee $\mathbb{R}_0$.

2a-vervolg Het aantonen dat de twee uitdrukkingen gelijkwaardig zijn, werd door een aantal studenten overgeslagen. Vergeten misschien?
Er zijn grofweg twee manieren gebruikt om dit aan te tonen: door de vergelijking $y = \cot^{-1}(x)$ te manipuleren en uit te komen op $y = \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{sgn} x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ en door gebruik te maken van een rechthoekige driehoek, waarmee de relatie tussen de inverse sinus en de inverse cotangens getoond werd. In beide gevallen is het van belang rekening te houden met het teken (sgn(x)): dit werd soms vergeten.
Belangrijke foutieve aannamen zijn de volgende: dat $\cot^{-1}(x)$ hetzelfde zou zijn als $\frac{\cos^{-1}(x)}{\sin^{-1}(x)}$ en, vergelijkbaar, $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ dat gelijkgesteld werd aan $\frac{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}$. Dit is niet correct: het nemen van de inverse en het delen van functies, is niet commutatief!

2b De meeste studenten konden wel enige onderbouwing geven waarom $p(x)$ oneven was, maar deden daarbij uitspraken zonder deze te onderbouwen, zoals $\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}(x)$ of $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$. Het is van belang terug te gaan tot uitspraken waarvan het triviaal is dat ze correct zijn.

2c Het berekenen van de afgeleide werd op veel verschillende manieren aangepakt: met behulp van de formule voor de afgeleide van de inverse cotangens, de formule voor de afgeleide van de tangens (in combinatie met de definitie van de inverse cotangens), de formule voor de afgeleide van een inverse functie en/of de formule voor de afgeleide van de inverse sinus (in combinatie met de identiteit uit de opgave). In het laatste geval werd soms geconstateerd dat de functie sgn(x) als een constante beschouwd mag worden, terwijl anderen het omschreven tot $\frac{x}{|x|}$. Alle genoemde aanpakken leidden, modulo rekenfouten, tot een correcte uitkomst, maar verschilden zeer in benodigde tijd.