# OPLOSSINGEN EVALUATIE 1, 19/10/12

## Vraag 1

$$f(x) = \frac{x^3}{12} - \pi$$
$$g(x) = \frac{x^3}{3} - 5x + \sqrt{2}$$

**a.** Raaklijn $y_1 = a_1 x + b_1$ aan $f(x)$:

- Zelfde richtingscoefficient:

$$a_1 = f'(x_0) = \frac{x_0^2}{4}$$

- Raakt aan $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x_0) = a_1 x_0 + b_1 &\implies \frac{x_0^3}{12} - \pi = a_1 x_0 + b_1 \\ &\implies \qquad b_1 = -\frac{x_0^3}{6} - \pi \end{aligned}$$

**b.** Raaklijn $y_2 = a_2 x + b_2$ aan $g(x)$:

- Zelfde richtingscoefficient:

$$a_2 = g'(x_0) = x_0^2 - 5$$

- Raakt aan $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x_0) = a_2 x_0 + b_2 &\implies \frac{x_0^3}{3} - 5x_0 + \sqrt{2} = a_2 x_0 + b_2 \\ &\implies b_2 = -\frac{2}{3}x_0^3 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

**c.** Evenwijdig dus zelfde richtingscoefficienten:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 &\implies \frac{x_0^2}{4} = x_0^2 - 5 \\ &\implies x_0^2 = 20/3 \\ &\implies x_0 = \pm\sqrt{\frac{20}{3}} \end{aligned}$$

**d.** Loodrecht dus product richtingscoefficienten $= -1$:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 = -1 &\implies \frac{x_0^2}{4}(x_0^2 - 5) = -1 \\ &\implies x_0^4 - 5x_0^2 + 4 = 0 \\ (\text{stel } t = x_0^2) &\implies t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \implies t \in \{1, 4\} \\ &\implies x_0 \in \{-2, -1, 1, 2\} \end{aligned}$$

## Vraag 2

$$\left(P + \frac{5}{V^2}\right)(V - 0.03) = 9.7 \tag{1}$$

**a.** Impliciete differentiatie van vgl. 1 naar P:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(P + \frac{5}{V^2}\right)'(V - 0.03) + \left(P + \frac{5}{V^2}\right)(V - 0.03)' \\ &= \left(1 - \frac{10}{V^3}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)(V - 0.03) + \left(P + \frac{5}{V^2}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \\ \implies \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right|_{(1,5)} &= \left.\frac{0.03 - V}{P - \frac{5}{V^2} - \frac{0.3}{V^3}}\right|_{(1,5)} = -\frac{9.7}{3} \end{aligned}$$

**b.** $V(P)$ heeft een verticale raaklijn als de afgeleide naar $\pm\infty$ gaat. De afgeleide van $V$ naar $P$ vonden we al in deel (a). Dus:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} = \pm\infty &\implies P - \frac{5}{V^2} - \frac{0.3}{V^3} = 0 \text{ waar } V \neq 0.03 \\
\text{(uit vergelijking 1)} \qquad & P(V) = \frac{9.7}{V-0.03} - \frac{5}{V^2} \\
\implies \qquad & \frac{9.7}{V-0.03} - \frac{10}{V^2} - \frac{0.3}{V^3} = 0 \\
\implies \qquad & \frac{9.7V^3 - 10(V-0.03)^2}{V^3(V-0.03)} = 0 \\
\implies \qquad & 9.7V^3 - 10(V-0.03)^2 = 0
\end{aligned}$$

**c.**

$$\begin{aligned}
P(V) &= \frac{9.7}{V-0.03} - \frac{5}{V^2} \\
\implies \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} &= -\frac{9.7}{(V-0.03)^2} + \frac{10}{V^3}
\end{aligned}$$

Een verticale raaklijn in het $(P,V)$ vlak aan $V(P)$ wordt een horizontale raaklijn aan $P(V)$ in het $(V,P)$ vlak, en dus:

$$0 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} \implies 0 = -9.7V^3 + 10(V-0.03)^2$$

Dit is de zelfde vergelijking voor $V$ als in het vorige deel.

**d.**

- $\lim_{V\to+\infty} P(V) = \lim_{V\to+\infty}\left(\frac{9.7}{V-0.03} - \frac{5}{V^2}\right) = 0$
- $\lim_{V\to+\infty} VP(V) = \lim_{V\to+\infty}\left(\frac{9.7V}{V-0.03} - \frac{5V}{V^2}\right) = \lim_{V\to+\infty}\frac{9.7}{1-\frac{0.03}{V}} = 9.7$