Evaluatie 2 (31/10/2012)

Vraag 1. Los volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

wanneer gegeven is dat $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$. Voor de gevonden $y(x)$, bereken vervolgens ook alle kritieke punten.

Oplossing. We beginnen met het oplossen van de hulpvergelijking $r^2 - 4r + 13 = 0$. De discriminant is -36 dus de oplossingen zijn $r = 2 \pm 3i$. De algemene oplossing voor deze differentiaalvergelijking is dus

$$y = Ae^{2x}\cos(3x) + Be^{2x}\sin(3x).$$

De afgeleide is dan

$$y' = 2Ae^{2x}\cos(3x) - 3Ae^{2x}\sin(3x) + 2Be^{2x}\sin(3x) + 3Be^{2x}\cos(3x).$$

We vullen de randvoorwaarden in:

$$y(0) = A \cdot 1 \cdot 1 + B \cdot 1 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow A = 0$$

$$y'(0) = 2B \cdot 1 \cdot 0 + 3B \cdot 1 \cdot 1 = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{3}$$

De oplossing in dit geval is:

$$y(x) = \frac{e^{2x}\sin(3x)}{3}.$$

We moeten enkel nog de kritieke punten bepalen.

$$\begin{aligned}
& y'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{3e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2e^{2x}\sin(3x)}{3} = 0 \\
\overset{e^{2x}\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{2}{3}\sin(3x) = -\cos(3x) \\
\Leftrightarrow \quad & \tan(3x) = \frac{-3}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 3x = \operatorname{Bgtan}\left(\frac{-3}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\operatorname{Bgtan}\left(\frac{-3}{2}\right)}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

We vinden dus kritieke punten voor $x = \frac{\operatorname{Bgtan}\left(\frac{-3}{2}\right)}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Vraag 2. Beschouw de functie

$$f(x) = x^{\frac{3}{4+\ln x}}.$$

(a) Wat is het domein van deze functie?

(b) Toon aan dat de functie stijgend is op haar hele domein.

(c) Bereken de rechterlimiet

$$\lim_{x \to e^{-4}+} f(x).$$

(d) Toon aan dat er een horizontale asymptoot is, en geef de vergelijking van die rechte.

Oplossing.

(a) Voor het domein: we zien meteen dat er $\ln(x)$ in de opgave staat. Aangezien $\operatorname{dom}(\ln) = \mathbb{R}_0^+$ weten we dus dat $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$. Bovendien staat in de exponent een breuk, waarvan de noemer niet 0 mag worden. Dus moet $4 + \ln x \neq 0$. Maar dan moet $x \neq e^{-4}$. We vinden dus dat $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}_0^+ \backslash \{e^{-4}\}$.

(b) Om aan te tonen dat de functie stijgend is op haar hele domein, tonen we aan dat de afgeleide steeds positief is. De afgeleide berekenen we door f te herschrijven:

$$f(x) = x^{\frac{3}{4+\ln x}} = e^{\ln(x^{\frac{3}{4+\ln x}})} = e^{\frac{3}{4+\ln x}\ln x} = e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\frac{3\ln x}{4+\ln x}}{\mathrm{d}\,x} \\ &= e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} \cdot \left(\frac{3}{x(4+\ln x)} - \frac{3\ln x}{x(4+\ln x)^2} \right) \\ &= e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} \cdot \left(\frac{12 + 3\ln x - 3\ln x}{x(4+\ln x)^2} \right) \\ &= \frac{12 e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}}}{x(4+\ln x)^2}. \end{aligned}$$

Aangezien $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$, is dit steeds positief. De functie f is dus stijgend op haar hele domein.

(c) We vinden:

$$\lim_{x \to e^{-4}+} f(x) = \lim_{x \to e^{-4}+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} \underset{(1)}{=} e^{\frac{3\cdot(-4)}{4+(-4)^+}} \underset{(2)}{=} e^{\frac{-12}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$$

waarbij we bij (1) de limiet gewoon invullen, en bij (2) gebruiken dat we de rechterlimiet nemen (Merk op dat we met de notatie $(-4)^+$ bedoelen getallen net groter dan -4, dus rechts van -4 op de reële as).

(d) Om de horizontale asymptoot te bepalen, berekenen we de limiet naar $+\infty$. (Gedrag naar $-\infty$ is niet van toepassing omdat we dit niet kunnen benaderen in het domein van de functie.) We vinden

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{3\ln x}{\ln x\left(\frac{4}{\ln x}+1\right)}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{3}{\frac{4}{\ln x}+1}} = e^{\frac{3}{0+1}} = e^3$$

De horizontale asymptoot is $H \leftrightarrow y = e^3$.