Deelexamen 2

Januari 2020

De (vermoedelijke) eindoplossingen staan op de laatste pagina.

1 Examen

Vraag 1: Meerkeuze

1. Duid de Cartesiaanse vergelijking aan die overeenkomt met de parametervergelijking van het lemniscaat van Gerono.
$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \frac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$$
   (a) $0 = x^4 - x^2 + y^2$
   (b) $0 = y^4 - x^2 + y^2$
   (c) $0 = x^4 + x^2 - y^2$
   (d) $0 = y^4 + x^2 - y^2$
2. Welke van de volgende uitspraken is juist omtrent de convergentie/divergentie van de volgende reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\pi)}{\sqrt{\ln(n+1)}}$$
   (a) De reeks is absoluut convergent en dus in het bijzonder convergent.
   (b) De reeks is divergent
   (c) De reeks is convergent, maar niet absoluut convergent.
3. Duid het juiste antwoord omtrent volgende limiet aan
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + \ln(y+1)}{x^2 + y^2}$$
   (a) De limiet bestaat en is gelijk aan 0.
   (b) De limiet bestaat en is gelijk aan 2.
   (c) De limiet bestaat niet.
   (d) De limiet bestaat en is gelijk aan $+\infty$.

4. Beschouw de functie

$$H(x,y) = 2e^{-x^4} + e^{-y^2}$$

en de punten $(1,0), (0,1), (-2,0)$ en $(0,-2)$. Welke uitspraak is juist?

(a) Voor ieder punt geldt dat H het snelste afneemt in richting de oorsprong. Deze grootte van afname is in ieder punt verschillend.

(b) Voor ieder punt geldt dat H het snelste afneemt in richting de oorsprong. Deze grootte van afname is in ieder punt dezelfde.

(c) Voor ieder punt geldt dat H het snelste toeneemt in richting de oorsprong. Deze grootte van afname is in ieder punt dezelfde.

(d) Voor ieder punt geldt dat H het snelste toeneemt in richting de oorsprong. Deze grootte van afname is in ieder punt verschillend.

Vraag 2. Extrema van de Lennard-Jonespotentiaal

De Lennard-Jonespotentiaal is een functie om de interactie tussen twee moleculen te beschrijven. Deze potentiaal wordt gegeven door

$$\Psi(x,y) = 4a\left[\frac{b^{12}}{(x^2+y^2)^6} - \frac{b^6}{(x^2+y^2)^3}\right]$$

met $a, b > 0$.

1. Geef het domein van Ψ. Is de functie continu? Motiveer je antwoord.
2. Herschrijf de potentiaal in poolcoördinaten.
3. Lokaliseer en bepaal de aard van alle extrema van Ψ. Geef je berekeningen weer.

Vraag 3. Bepaal de Maclaurinreeks van volgende functie

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}.$$

Geef bijhorend convergentieinterval en bespreek ook de randpunten. Geef je berekeningen weer.

Vraag 4. Wat is het manteloppervlak van een afgeknotte kegel met hoogte h waarbij het bovenvlak wordt gegeven door een cirkel met straal r_1 en het grondvlak door een schijf met straal r_2 ($0 < r_1 < r_2$)? (De totale oppervlakte van een afgeknotte kegel wordt gegeven door de som van het manteloppervlak en van de oppervlakten van het grond- en bovenvlak). Geef je berekeningen weer.

Vraag 5. Bepaal de functie y die voldoet aan

$$y(x) = x^2 - \int_2^x \frac{y(t)}{t(t-1)} dt.$$

Geef je berekeningen **NIET** weer. (Hahaha mopje natuurlijk wel :-‖).

Vraag 6.

1. Beschrijf en schets de niveaukrommen van $G(x, y) = \ln(x - y)$. Motiveer je antwoord.
2. Bepaal het globale maximum van $G(x, y) = \ln(x-y)$ onder de voorwaarde dat $(x-4)^2+y^2 = 4$. Geef je berekeningen weer en motiveer je antwoord.

2 Eindoplossingen

Hieronder vind je de eindoplossingen van de vragen. Deze zijn niet opgelost door een assistent of prof dus er kunnen foutjes inzitten (#Leenbelike). Na elke vraag staat ook nog een korte uitleg over de oplossingsmethode.

- **Vraag 1:**
  1. **a)** Zet de tweede uitdrukking om naar $\sin(t) = ...$. Pas vervolgens de hoofdformule van de goniometrie toe en vorm om naar de gevraagde vorm.
  2. **c)** Eerst moet je inzien dat de reeks convergent is door gebruik te maken van de "alternating series test". De rij is absoluut dalend en convergeert naar nul dus is de reeks convergent. Dan moet je de absolute convergentie nog testen. Sinussen? Dacht ik niet, pak gewoon 1. Verder is ook $n > \sqrt{\ln(n+1)}$ voor x groot genoeg en zo komt ge der dan wel.
  3. **c)** Probeer eens de richtingen $y = 0$ en $x = 0$.
  4. **d)** Bereken de gradiënt in ieder punt want die wijst in de richting van de grootste toename.
- **Vraag 2:**
  1. Het domein van Ψ is $\mathbb{R}_0^2$ omdat de noemers in de functie nul worden wanneer $(x, y) = (0, 0)$. De functie is continu op haar domein omdat ze is opgebouwd uit de som van twee rationale functies en die zijn continu op hun domein. De som van twee continue functies is namelijk ook continu.
  2. $\Psi = \frac{4ab^6}{r^6}\left(\frac{b^6}{r^6} - 1\right)$. Gebruik $r^2 = x^2 + y^2$.
  3. De lokale extrema bevinden zich op de cirkel $x^2 + y^2 = \sqrt[3]{2}b^2$ rond de oorsprong. Het zijn allemaal globale minima. Zoek als eerste de kritieke punten van de functie. De limiet voor de afstand tot de oorsprong $\sqrt{x^2 + y^2}$ gaande naar oneindig is nul en die van van (x, y) gaande naar de oorsprong is $+\infty$. Aangezien de waarde van eender welk punt op de gevonden cirkel negatief is, moet Ψ een absoluut minimum hebben. Dat zal dus op de cirkel liggen. Omdat Ψ continu is, moeten al de gevonden extrema minima zijn.
- **Vraag 3:** De reeks is

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n (1 + x^2)$$

  met als convergentieinterval $(-1, 1)$. Een mogelijke oplossingsmethode is om de functie te splitsen als $x^2 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$. De reeks van $\frac{1}{1-x}$ heb je gezien, dus als je in die reeks $-x$ invult, krijg je de reeks van $\frac{1}{1+x}$. Die som kan je gewoon tweemaal substitueren en je vindt de Maclaurinreeks.
  Gebruik vervolgens de geziene methoden om convergentie te bepalen. De alternerende $(-1)^n$ is divergent, dus de randpunten horen niet bij het interval.
- **Vraag 4:** $A_{mantel} = \pi h(r_1 + r_2)$. Teken een dwarsdoorsnede van de afgeknotte kegel. Je ziet dat de doorsnede niets meer dan de rechte $r(h) = \frac{r_2 - r_1}{h} + r_1$ is. Laat deze rechte rond de x-as wentelen over het interval $[0, h]$ en je vindt de gevraagde oppervlakte

- **Vraag 5:** De gezochte functie is (normaal gezien) $y(x) = \frac{x^3-2x^2+2x}{x-1}$. Leid de uitdrukking eerst af, los de eerste orde differentiaalvergelijking op (denk aan de juiste volgorde van de termen en aan partieelbreuken!). Vul als laatste de beginvoorwaarde $y(2) = 4$ in.
- **Vraag 6:**
  1. Het patroon lijkt op een zebrakoek.
  2. Het globale extrema ligt bij $(4 + \sqrt{2}, -2)$. Gebruik de methode van Lagrange en vind twee kritieke punten binnen de voorwaarde. Het is hier ook belangrijk om nog een beetje motivatie te geven waarom dit het maximum is. De cirkel valt namelijk volledig binnen het domein van G en is dus een gesloten verzameling. Die moet dus een globaal maximum hebben.