

Deelexamen 2

Menselijke creaturen

Januari 2021

Woord vooraf

Dit examen vond in tegenstelling tot deelexamen 1 wel op de campus plaats. Je kon dus wel al je berekeningen afgeven.

Vraag 1 (1,5 + 1,5 + 3 punten)

De standaardvorm van Pringles chips wordt bekomen door een hyperbolische paraboloid

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{a^2}$$

te creëren op een domein gegeven door een elliptische schijf,

$$x^2 + \frac{y^2}{2} \leq q^2.$$

De verpakking is een eenvoudige cirkelvormige cilinder langs de z -as met straal $r = 2$.

- a) Bepaal de maximale waarde van q zodat de chips in hun verpakking passen (zonder te roteren rond de x - of y -as).

Toon aan dat voor $a = \sqrt{2}$ elke chip een hoogte heeft van $\Delta z = 2$ voor deze waarde van q . Hier volstaat een eenvoudige redenering.

- b) De chips worden na het bakken bestrooid met kruiden, die verticaal vallen langs de z -as. Hierbij vallen er k eenheden kruiden per oppervlak naar beneden. Vanwege de kromming van de chip is de kruiding per oppervlak van de chip zelf echter niet uniform. Geef een functie van x en y die de kruiden oppervlakte dichtheid op de chip beschrijft.

- c) De nieuwe vorm heeft als begrenzing van het domein

$$x^2 + y^4 - by^2 = 1 \quad (\text{met } a = \sqrt{2}).$$

Voor welke waarden van b ligt de maximale z -waarde langs deze curve op de y -as, maar de minimale z -waarde langs deze curve *niet* op de x -as? Geef je berekening weer.

Vraag 2 (1 + 1 + 2 punten)

Beschouw het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ voor een positief reëel getal $a \in \mathbb{R}^+$. Dit oppervlak kan je bekijken als grafiek van een functie $z = f(x, y)$.

- a) Identificeer het domein van de functie $f(x, y)$. Geef ook het bereik van de functie $f(x, y)$. Pas op dat je het gegeven oppervlak niet veralgemeend!
- b) Geef de vergelijking van het raakvlak aan deze grafiek, en dit voor een willekeurig punt $P(x_0, y_0)$ uit het domein van f . Geef je berekeningen weer.
- c) Toon aan voor dit raakvlak dat de som van de drie segmenten, die dit vlak afsnijdt uit de drie coördinaatassen, constant is.

Vraag 3 (1 + 2 + 1 punten)

Een ballon zweeft door de lucht en wordt meegevoerd door de wind. We hebben geen functie voor de wind zelf, maar wel een functie die de luchtdruk P beschrijft in functie van de x en y positie. De wind blaast altijd van hoge naar lage luchtdruk, en volgt daarbij altijd de maximale lokale verandelijk van de luchtdruk. Voor de luchtdruk geldt:

$$P(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$$

- a) Als de ballon begint in $(4, 1)$, wat is in dit punt de richting waarin de ballon vliegt? Geef je berekening weer.
- b) Stel de vergelijking op van een curve die het traject van de ballon beschrijft. Geef je berekening weer.
- c) Waar zal de ballon zich bevinden na een lange tijd? Een eenvoudige redenering volstaat.

Vraag 4 (3 punten)

Stel $F(x) = \int_0^{3x^2} (\sin(t^2) - \cos(t)) dt$. Bepaal dan de limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + F(x)}{9x^6}$$

Vraag 5 (3 punten)

Bepaal een Maclaurinreeks voor de functie $f(x) = (1 - x) \cos^2(x)$. Geef ook het bijhorende convergentie-interval.