Oplossing deelexamen calculus, 23/11/2012

Vraag 1

Opgave

De Laplace-transformatie van een functie $f(t)$ die gedefinieerd is voor alle positieve waarden van t, wordt gedefinieerd als

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

wanneer deze oneigenlijke integraal bestaat. Bepaal de Laplace-transformatie van de functie $f(t) = \cosh(7t)$. Lukt dit voor alle waarden van s? Verklaar.

Modeloplossing

We berekenen eerst de onbepaalde integraal van de functie $t \mapsto e^{-st}\cosh(7t)$. In de eerste stap gebruiken de definitie van de functie cosh, nl.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

We vinden dan

$$\int e^{-st}\cosh(7t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int e^{(7-s)t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int e^{-t(7+s)}\,\mathrm{d}t.$$

Deze onbepaalde integralen zijn gemakkelijk te berekenen met de substitutieregel. We vinden dan

$$\int e^{-st}\cosh(7t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{e^{(7-s)t}}{7-s} - \frac{1}{2}\frac{e^{-t(7+s)}}{7+s}.$$

De bepaalde (oneigenlijke) integraal bepalen we dan als volgt

$$\begin{aligned}
F(s) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\cosh(7t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{(7-s)t}}{7-s} - \frac{1}{2}\frac{e^{-t(7+s)}}{7+s}\right)_{t=0}^{t=R} \\
&= \frac{1}{2(7-s)}\lim_{R\to\infty} e^{(7-s)R} - \frac{1}{2(7+s)}\lim_{R\to\infty} e^{-R(7+s)} - \frac{1}{2(7-s)} + \frac{1}{2(7+s)} \\
&= \frac{1}{2(7-s)}\lim_{R\to\infty} e^{(7-s)R} - \frac{1}{2(7+s)}\lim_{R\to\infty} e^{-R(7+s)} + \frac{s}{s^2-49}.
\end{aligned}$$

$F(s)$ bestaat dus enkel als beide limieten $\lim_{R\to\infty} e^{(7-s)R}$ en $\lim_{R\to\infty} e^{-R(7+s)}$ bestaan en eindig zijn. Dit is enkel het geval als $7-s \leq 0$ en $7+s \geq 0$ of dus wanneer $s \geq 7$. Omdat $7-s$ voorkomt in de noemer van bovenstaande uitdrukking, moeten we ook het geval $s = 7$ uitsluiten. We vinden dus dat $s > 7$ en in dat geval zijn beide limieten nul. We concluderen dat de Laplace-transformatie enkel bestaat voor $s > 7$ en gegeven is door

$$F(s) = \frac{s}{s^2-49}, \qquad s > 7.$$

Opmerkingen

- Verschillende studenten berekenen de onbepaalde integraal niet met behulp van de definitie maar gebruiken tweemaal partiële integratie om zo een uitdrukking te bekomen waar de te berekenen integraal weer in voorkomt. Door de integraal dan af te zonderen, vind je dan inderdaad een primitief. Deze methode is even goed, maar de integraal berekenen met behulp van de definitie is veel eenvoudiger en geeft minder kans op rekenfouten.

- Je moet goed begrijpen wat het verschil is tussen een bepaalde en een onbepaalde integraal. Hier wordt gevraagd om een bepaalde integraal te berekenen en je uitkomst kan dus in geen geval nog afhangen van de integratieveranderlijke t.

- Voor deze berekening had je de volgende limieten van de exponentiële functie nodig

$$\lim_{x\to\infty} e^{ax} = \begin{cases} +\infty & \text{als } a > 0, \\ 1 & \text{als } a = 0, \\ 0 & \text{als } a < 0. \end{cases}$$

  Deze limieten volgden onmiddellijk uit het feit dat $\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$ en $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. (Wie de onbepaalde integraal had berekend met partiële integratie bekomt limieten waar de functies sinh, cosh en exp samen in voorkomen. Om hier wijs uit te raken, moet je alsnog de definitie van sinh en cosh gebruiken zodat je enkel exponentiële functies overhoudt.)

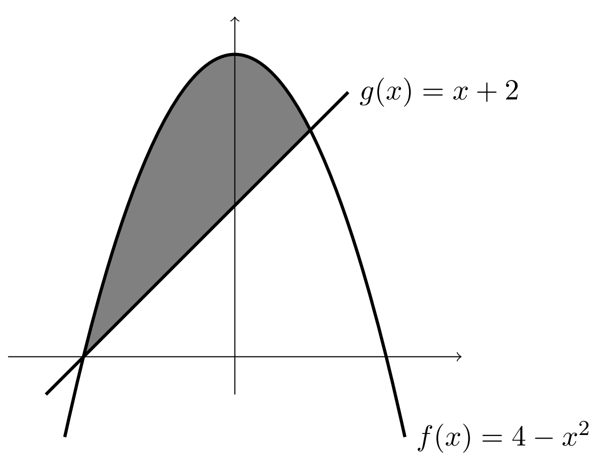
Vraag 2

Opgave

Beschouw een plaat met uniforme dichtheid 2 begrensd door de grafieken van $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = x + 2$. Bepaal de massa en het massacentrum (x- en y-coördinaat!) van deze plaat.

Modeloplossing

- We maken eerst een schets van de plaat.



  Een berekening leert dat de twee functies snijden in $x = -2$ en $x = 1$. We vinden dus de snijpunten $(-2, 0)$ en $(1, 3)$.

- Omdat de dichtheid constant 2 is wordt de massa gegeven door

$$
\begin{aligned}
m &= 2\int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right) \\
&= 9.
\end{aligned}
$$

- De x-coördinaat van het massacentrum wordt gegeven door (laat je inspireren door vb 8 p415)

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{M_{x=0}}{m} \\
&= \frac{1}{9} 2\int_{-2}^{1} x(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{9}\int_{-2}^{1} (2x - x^3 - x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{9}\left[x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right] \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

- De y-coördinaat berekenen was iets moeilijker. We schetsen 2 verschillende methodes.

  Methode 1. We volgen de strategie van het bovenvermelde voorbeeld op pagina 416. Het relevante oppervlakte-element is een dunne verticale strook van breedte $\mathrm{d}x$ en hoogte $f(x) - g(x)$ en heeft dus oppervlakte $(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ en massa

$$
\mathrm{d}m = 2(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.
$$

  Aangezien de massadichtheid (per oppervlakte-eenheid) constant is (nl. 2) heeft zeker het massaelement $\mathrm{d}m$ constante massadichtheid en ligt zijn massacentrum dus in het midden $\overline{y}_{\,\mathrm{dm}} = \frac{1}{2}(f(x)+g(x))$. **Let op het +-teken!** Het moment van $\mathrm{d}m$ t.o.v. de as $y = 0$ is dus

$$
\mathrm{d}M_{y=0} = \overline{y}_{\,\mathrm{dm}}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \cdot 2(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = (f(x)^2 - g(x)^2)\,\mathrm{d}x.
$$

  We vinden dan

$$
\begin{aligned}
\overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m} &= \frac{1}{9}\int_{x=-2}^{x=1} \mathrm{d}M_{y=0} \\
&= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1} \left(f(x)^2 - g(x)^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1} \left(12 - 4x - 9x^2 + x^4\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9}\left[12x - 2x^2 - 3x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} \\
&= \frac{12}{5}.
\end{aligned}
$$

Methode 2. Een alternatieve methode om het moment rond de x-as te berekenen is om de plaat in dunne horizontale strookjes te verdelen met hoogte $\mathrm{d}y$ en lengte

$$\begin{cases} y - 2 + \sqrt{4-y} & \text{als } 0 \leq y \leq 3, \\ 2\sqrt{4-y} & \text{als } 3 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

Je kan dan de y-coördinaat van het massacentrum berekenen met deze integraal

$$\overline{y} = \frac{1}{9}\left(2\int_0^3 y(y-2+\sqrt{4-y})\,\mathrm{d}y + 2\cdot 2\int_3^4 \sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y\right).$$

De berekening van deze integraal laten we over aan de lezer.

Opmerkingen

- Maak een schets. Controleer dan ook dat de snijpunten die je berekend hebt, overeenkomen met de snijpunten die je ziet op je schets.
- Vereenvoudig waar mogelijk.
- Maak geen rekenfouten.
- Analoog werken aan een voorbeeld uit het boek (p 416) is goed, maar je moet de methode dan wel hier en daar aanpassen. In ons geval is de onderkant van de plaat niet gewoon de x-as en dat zorgt ervoor dat je de formules onderaan het voorbeeld niet gewoon kan overnemen.
- Ga na of je uitkomst plausibel is als je de figuur bekijkt. Zo niet heb je waarschijnlijk ergens een fout gemaakt.