Calculus, **24/11/2014**

Reeksnr.:
Naam:

1. Gegeven de reële functie $f(t)$ met als voorschrift

$$f(t) = 2 - \int_0^{t^2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$$

a) Geef het domein van de functie $f(t)$. Op dit domein, bespreek waar de functie stijgt, daalt en bepaal de lokale extrema.

b) Bekom een alternatief voorschrift voor $f(t)$ door de integraal uit te rekenen.

c) Bereken de linkerlimiet

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

(Bij het oplossen van vraag 1c mag je gebruik maken van de functiewaarde $f(1) = 0$, ook indien je het antwoord op vraag 1b niet gevonden hebt.)

(3 ptn)

Antwoord:

(a) Het domein van de functie $f(t)$ wordt bepaald door alle waarden van t waarvoor de integraal in de definitie van $f(t)$ bestaat. Opdat de integrand bestaat in $\mathbb{R}$, moet aan drie voorwaarden zijn voldaan:

- $\sqrt{x}$ moet gedefinieerd zijn; dit is voldaan voor $x \geq 0$.
- $\sqrt{x}$ moet behoren tot het domein van $\arcsin(x)$. Omdat het domein van de boogsinusfunctie gelijk is aan $[-1, 1]$, volgt hieruit dat $x \in \mathbb{R}^+ \cap [-1, 1]$ ofwel $x \in [0, 1]$.
- $\sqrt{1-x}$ moet gedefinieerd zijn en mag niet gelijk zijn aan nul; dit is voldaan voor $x < 1$.

Bijgevolg bestaat de integrand in $\mathbb{R}$ als en slechts als $x \in [0, 1[$. Omdat in de integraal die in de definitie van $f(t)$ voorkomt, geïntegreerd wordt van $x = 0$ tot $x = t^2$, behoren de t-waarden waarvoor $t^2 \in [0, 1[$ tot het domein van de functie. Zo vinden we het open interval $]-1, 1[$.

We onderzoeken nog wat er gebeurt in de randpunten van het domein. Voor $t = \pm 1$ is de integraal

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx \qquad (*)$$

een oneigenlijke integraal: de functie is niet begrensd op haar domein. Om de convergentie van deze integraal te onderzoeken, gebruiken we het begrippenapparaat rond 'grote O'. We weten enerzijds dat

$$\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

aangezien $\arcsin\sqrt{x} \leq \frac{\pi}{2}$ voor alle $x \in [0, 1[$. Bovendien convergeert de integraal $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$: dit is (na een substitutie $y = 1-x, dy = -dx$ die de integraal omvormt tot $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}dy$) een p-integraal met $p = 1/2$ waarvan we uit de theorie weten dat ze convergeert. Uit Stelling 6.3 volgt dat de integraal $(*)$ eveneens convergeert. Het domein van de functie is dus het gesloten interval $[-1, 1]$.

We bepalen nu het tekenverloop van f. Hiervoor berekenen we eerst $f'(t)$ met het gevolg van de Hoofdstelling van de Calculus vermeld boven example 8 in hoofdstuk 5:

$$f'(t) = -\frac{\arcsin(\sqrt{t^2})}{\sqrt{1-t^2}} \cdot (2t) = \frac{-2t\arcsin(|t|)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

We vinden een lokaal extremum voor $t = 0$. Aangezien het teken van $f'(t)$ volledig bepaald wordt door het teken van t zelf (immers $\arcsin(|t|)$ en $\sqrt{1-t^2}$ zijn positief voor iedere waarde van t), geeft dit de volgende tekentabel:

t	-1		0		1
$f'(t)$	\	+	0	-	\
$f(t)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Hieruit besluiten we dat $f(t)$ een lokaal maximum bereikt voor $t = 0$. Uit de tekentabel halen we ook dat $f(t)$ lokale minima bereikt aan de randpunten $t = \pm 1$ van haar domein, hoewel $f'(t)$ er niet gedefinieerd is.

(b) We gebruiken partiële integratie: stel

$$u = \arcsin(\sqrt{x}) \qquad dv = (1-x)^{\frac{-1}{2}}$$
$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \qquad v = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

Dit vormt de integraal om in

$$\begin{aligned}\int_0^{t^2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx &= \left[-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right]_0^{t^2} + \int_0^{t^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= -2\sqrt{1-t^2}\arcsin\sqrt{t^2} + 2\cdot\sqrt{1}\cdot\arcsin(0) + [2\sqrt{x}]_0^{t^2} \\ &= -2\sqrt{1-t^2}\arcsin|t| + 2|t|.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$f(t) = 2(1 + \sqrt{1-t^2}\arcsin|t| - |t|)$$

.

(c) Indien we van de hint gebruik maken, zien we dadelijk dat we te maken hebben met een onbepaalde vorm van het type $\frac{0}{0}$. Via de regel van de l'Hôpital geldt dat

$$\lim_{t\to 1^-}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \overset{(H)}{=} \lim_{t\to 1^-}\frac{-f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t} = \lim_{t\to 1^-}\frac{2t\arcsin|t|\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin 1 = \pi.$$

Je kunt ook de limiet uitrekenen door gebruik te maken van de uitdrukking van $f(t)$ die je in (b) gevonden hebt. Als je dit doet, vind je dat

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} &= 2\left(\lim_{t\to 1^-}\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{t\to 1^-}\arcsin t\right) \\ &= \lim_{t\to 1^-}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} + \lim_{t\to 1^-}\arcsin t = 0 + \pi = \pi.\end{aligned}$$

waarbij je de absolute waarde kunt weglaten in het argument van de boogsinus, en het opsplitsen van de limiet van de som (a posteriori) verantwoord is aangezien de limiet van beide termen apart bestaat.

2. Beschouw de curve gegeven door de vergelijking

$$(3y)^{\frac{2}{3}} = x^2 + 2$$

in het interval $\frac{2^{3/2}}{3} \leq y \leq \frac{11^{3/2}}{3}$ en waarbij $x \geq 0$. Bereken de zijdelingse oppervlakte van het komvormig lichaam bekomen door omwenteling van deze curve rond de y-as. *(2 pt)*

Antwoord:

We herschrijven eerst de vergelijking van de kromme naar $y = f(x)$ met $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$. Het domein $\frac{2^{3/2}}{3} \leq y \leq \frac{11^{3/2}}{3}, x \geq 0$ is equivalent met

$$\begin{aligned} 2^{3/2} &\leq 3y \leq 11^{3/2} \\ 2 &\leq (3y)^{2/3} \leq 11 \\ 0 &\leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Nu berekenen we

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x^2+2)^{1/2}, \\ \sqrt{1+(f'(x))^2} &= \sqrt{1+x^2(x^2+2)} = \sqrt{x^4+2x^2+1} = x^2+1. \end{aligned}$$

De oppervlakte van het omwentelingslichaam bekomen door omwenteling van deze figuur rond de y-as is bijgevolg gelijk aan

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_0^3 x(x^2+1)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^3 x^3 + x\,dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 2\pi(\frac{81}{4} + \frac{9}{2}) = \frac{99}{2}\,\pi \end{aligned}$$

Alternatief:

We kunnen ook de gevraagde oppervlakte berekenen door het voorschrift te herschrijven naar $x = g(y)$ met $g(y) = [(3y)^{2/3} - 2]^{1/2}$, alleen wordt het rekenwerk wat complexer. Eerst berekenen we

$$g'(y) = \frac{1}{[(3y)^{2/3} - 2]^{1/2}\,(3y)^{1/3}}$$

Merk op dat

$$g'(y) = \frac{1}{g(y)(3y)^{1/3}}$$

Voor eenvoud van notatie laten we $g(y)$ zo lang mogelijk staan in de berekeningen. We schrijven ook $y_0 = \frac{2^{3/2}}{3}$ en $y_1 = \frac{11^{3/2}}{3}$. Dan is

$$\sqrt{1+(g'(y))^2} = \left(1 + \frac{1}{(g(y))^2(3y)^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De gevraagde oppervlakte is gelijk aan

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_{y_0}^{y_1} g(y) \left(1 + \frac{1}{(g(y))^2 (3y)^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= 2\pi \int_{y_0}^{y_1} \left((g(y))^2 + \frac{1}{(3y)^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= 2\pi \int_{y_0}^{y_1} \left((3y)^{2/3} - 2 + \frac{1}{(3y)^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= 2\pi \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{(3y)^{4/3} - 2(3y)^{2/3} + 1}{(3y)^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= 2\pi \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{[(3y)^{2/3} - 1]^2}{[(3y)^{1/3}]^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= 2\pi \int_{y_0}^{y_1} (3y)^{1/3} - (3y)^{-1/3}\, dy \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{3}\frac{3}{4}(3y)^{4/3} - \frac{1}{3}\frac{3}{2}(3y)^{2/3}\right]_{y_0}^{y_1} \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{4}(11^{(3/2\cdot 4/3)} - 2^{(3/2\cdot 4/3)}) - \frac{1}{2}(11^{(3/2\cdot 2/3)} - 2^{(3/2\cdot 2/3)})\right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{4}(11^2 - 2^2) - \frac{1}{2}(11 - 2)\right) = 2\pi \left(\frac{117}{4} - \frac{9}{2}\right) = \frac{99}{2}\,\pi.
\end{aligned}$$

Dit is uiteraard dezelfde oplossing als diegene die we met de eerste methode zijn bekomen.

Puntenverdeling

Vraag 1

Correct beargumenteren van het domein: 1 pt
Tekenverloop $f(t)$: 0.75 pt
Berekenen integraal in (1b): 0.5 pt
Berekenen limiet: 0.75 pt

Indien $f'(t)$ fout berekend werd maar het tekenverloop van deze afgeleide wel correct besproken werd, kon dit nog 0.50 of 0.25 punten opleveren afhankelijk van de gevonden $f'(t)$. Sommigen hebben eerst de integraal in (1b) uitgerekend en daaruit het domein bepaald. Indien deze integraal correct werd berekend en duidelijk vermeld werd dat men daaruit het domein van $f(t)$ kan halen, leverde dit 1 punt op, maar het domein ophangen aan een foute integraal kon maximaal 0.5 punten opleveren.

Vraag 2

Voor $y = f(x)$
Omvormen $y = f(x)$ en omvormen grenzen: 0.5 pt
Correcte formule: 0.25 pt
Correct berekenen van $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$: 0.75 pt
Correct uitrekenen van resulterende integraal (merkwaardig product): 0.5 pt

Voor $x = g(y)$

Omvormen $x = g(y)$: 0.25 pt
Correcte formule: 0.25 pt
Correct berekenen van $\sqrt{1 + (g'(y))^2}$: 0.75 pt
Foutloos opstellen van te berekenen integraal: 0.25 pt
Correct uitrekenen van resulterende integraal (merkwaardig product): 0.5 pt

Veel gemaakte fouten

- Bij vraag (1a) werd vaak vergeten om de condities die op x liggen opdat de integrand zou bestaan, om te vormen naar condities op het domein van $f(t)$. Dit leverde dan het foutieve domein $[0, 1[$.
- Zeer vaak werd bij (1a) de fout gemaakt om niet het geval $t = \pm 1$ apart te beschouwen. We hebben daar een oneigenlijke integraal. Dat de functie uiteindelijk ook voor $t = \pm 1$ gedefinieerd zal zijn, werd eigenlijk al weg gegeven in de hint bij opgave 1c!
- De ergste verschijningsvormen van bovenstaande fouten zijn, wanneer het domein gewoon wordt geponeerd zonder enige verdere verklaring. Dit kan uiteraard geen punten opleveren. Zoals uit de voorbeeldoplossing blijkt, vereist het bepalen van het domein reeds een subtiele redenering.
- Bij het bepalen van het tekenverloop in (1a) vergaten vele studenten om de factor (2t) mee te nemen; dit volgt uit het combineren van de hoofdstelling van de calculus met de kettingregel; zie het gevolg vermeld boven example 5.8 in het handboek.
- Merk op dat $\sqrt{(t^2)} = |t|$ in plaats van t.
- De integraal in (1b) kon ook worden berekend door gebruik te maken van de substitutie

  $$u = \arcsin(\sqrt{x}), \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

  en partiële integratie toe te passen op de resulterende integraal. Velen vergaten echter (nog steeds) de kettingregel toe te passen in het berekenen van du!
- Vraag (1c) werd meestal goed opgelost, soms vertrekkende van een foute afgeleide uit (1a), maar dit werd niet extra bestraft.
- Bij vraag 2 werden de meeste fouten gemaakt op relatief eenvoudige algebraïsche manipulaties; nauwkeurig rekenen is in dit geval meestal meer waard dan via een slordige berekening toch tot aan het eindresultaat willen raken.
- Een veel gemaakte fout bij vraag 2 was, wanneer het functievoorschrift werd omgevormd naar de vorm $y = f(x)$, de grenzen niet mee werden omgevormd in termen van x in plaats van y.