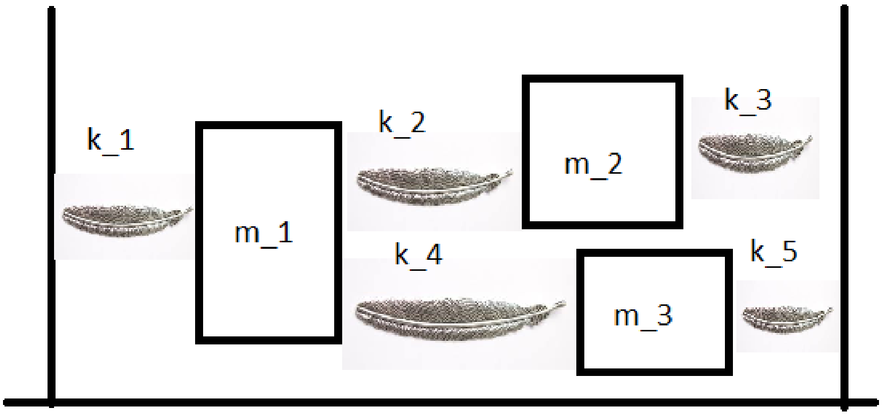
Differentiaalvergelijkingen examen

3 februari 2016

1 Vraag 1 : mondeling

Beschouw het massa-veer systeem in deze figuur



1. Stel de differentiaalvergelijking op voor dit systeem zonder wrijving.
2. Toon aan dat de matrix van dit stelsel negatief definiet is.
3. Neem $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ en $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1$. De eigenwaarden zijn -4,-2 en -1. Geef de algemene oplossing met behulp van de eigenwaardenmethode.

Bijvraag : Als je een drijvende periodische kracht in het systeem flikkert, waar moet je voor oppassen?

2 Vraag 2 : mondeling

Stel dat we de derdegraads differentiaalvergelijking

$$y^{'''} + P(x)y^{''} + Q(x)y^{'} + R(x)y = 0 \tag{1}$$

hebben met P, Q, R continue functies op $I = [a, b]$. Stel dat y_1 een gekende oplossing is.

1. Beschrijf hoe we tot een tweedegraads differentiaalvergelijking kunnen komen om 2 andere lineair onafhankelijke oplossingen te vinden.
2. Stel nu dat de derdegraads vergelijking niet homogeen is

   $$y^{'''} + P(x)y^{''} + Q(x)y^{'} + R(x)y = F(x) \tag{2}$$

   en dat we ook een particuliere oplossing y_p kennen. Hoe ga je te werk?

Bijvraag : Als je y_1, y_2, y_3 kent als homogene oplossingen, hoe ga je te werk om een particuliere oplossing te vinden?

3 Vraag 3: schriftelijk

Consider the Helmholtz problem :

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \tag{3}$$

in the 2D-Cartesian box $[0, L_x] \times [0, L_y]$ with following boundary conditions :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\,|_{x=0,y} = 0, \phi(L_x, y) = 0, \phi(x, 0) = 0, \phi(x, L_y) = 0 \tag{4}$$

Find the solution of the Helmholtz equation via separation of variables, so identify the values of B that allow a non-zero solution and find the corresponding solutions for ϕ.

Find the fundamental solution $\phi_0(x, y)$, defined as the solution of the smallest non-zero real value of B and find the corresponding value of B_0

Consider now the heat convection-diffusion equation

$$C_p\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T - \eta(T - T_0) + S \tag{5}$$

for $T(t, x, y)$ with a source $S(x, y)$. The parameters T_0 (reference temperature), C_p (heat capacity), η (heat exchange rate), k (heat transfer coefficient) are all constant. Assume that the fundamental solution can be used to represent both the solution for T and the source S. We can then write $T - T_0 = \tau_0(t)\phi_0(x, y)$ and $S = s_0\phi_0(x, y)$. What is the value of s_0 that ensures a steady temperature? ($= \frac{\partial T}{\partial t} = 0$)

4 Vraag 4: schriftelijk

A conductive square tile of side L is completely insulated (no heat flux is allowed at the edge). The initial state is a separable function of x and y. Answer the following question :

1. After a long time, the temperature will become uniform. Can you compute it on the basis of the laws of conservation of energy intrinsic to the heat equation?
2. Using separation of variables, compute the temperature for finite times.
3. Does the solution in 2, in the limit $t \to \infty$ correspond to the temperature obtained in 1 using the conservation laws?