

Naam:

Oefeningentoets Differentiaalvergelijkingen 2022-2023

G0N84A– Deel 1

November 2022

Beschikbare tijd: 1:45 uur

Instructies

1. **Schrijf op elk blad dat je afgeeft je naam (ook het voorblad).**
2. De test bestaat uit 2 vragen.
3. Je mag je cursustekst gebruiken, maar geen uitgewerkte oefeningen, of andere toegevoegde papieren.
4. GSM, rekenmachine, laptop, smartphone, of andere elektronica zijn niet toegelaten.
5. Je antwoord mag bestaan uit zo veel bladen als je wilt, maar nummer deze, en vergeet niet je naam erop te schrijven.
6. De oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Vraag 1

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

waarbij $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. We zoeken een particuliere oplossing met $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$ op verschillende manieren.

- (i) Vind met de eigenwaardemethode twee lineair onafhankelijke oplossingen, en gebruik deze om de gezochte particuliere oplossing te vinden. (2 punten)
- (ii) Zij $\phi = (\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q)$ een fundamentealmatrix, waarbij $\mathbf{x}_p$ en $\mathbf{x}_q$ je lineair onafhankelijke oplossingen zijn. Vind nu een oplossing als volgt:
 $\mathbf{x}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$
 en vergelijk de bevindingen. (2 punten)
- (iii) Bereken de exponentiële matrix $e^{\mathbf{A}t}$. (0.5 punt)
- (iv) Stel vast dat $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$. (0.5 punt)

Totaal: 5 punten

Section i:

find the eigenvalues of the matrix A:

$$(4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -2, 5$$

find the eigenvectors associated with the eigenvalues:

$$\lambda_1 : 3a_1 + a_2 = 0 \rightarrow \vec{v}_1 = [1, -3]^T$$

$$\lambda_2 : -a_1 + 2a_2 = 0 \rightarrow \vec{v}_2 = [2, 1]^T$$

this gives a solution of:

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

at 0, this is evaluated as:

$$1 = 2c_2 + c_1, \quad -1 = c_2 - 3c_1 \rightarrow c_2 = 2/7, \quad c_1 = 3/7$$

which gives:

$$\vec{x}(t) = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4e^{5t} \\ -9e^{-2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

Section ii:

The fundamental matrix is constructed from the linearly independent solutions determined before:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}$$

The zero phi matrix is:

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

and its inverse is given by:

$$\phi(0)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Now, from this, we can find the solution $\vec{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \phi(t)\phi^{-1}(0)\vec{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4e^{5t} \\ -9e^{-2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and so we see that this is the same as we found in section i.

Section iii: find the exponential matrix

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

Section iv:

at $t = 0$:

$$\vec{x}(0) = e^{At}\vec{x}_0(t) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vraag 2

Beschouw het volgende systeem van differentiaalvergelijkingen:

$$x' = -(x - y)(1 - x - y)$$

$$y' = x(2 + y)$$

(i) Bepaal de kritieke punten. (2 punten)

(ii) Onderzoek ook de aard en de stabiliteit van deze kritieke punten. (3 punten)

Totaal: 5 punten

Section i:

We can simplify the system to:

$$x' = (y - x)(1 - x - y) = y - yx - y^2 - x + x^2 + xy = y - y^2 - x + x^2$$

$$y' = x(2 + y) = 2x + xy$$

There are 4 critical points in the system: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[-2, -2]$, $[3, -2]$

Section ii:

The Jacobian is:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2x & 1 - 2y \\ 2 + y & x \end{bmatrix}$$

At these four different points:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (-1 - \lambda)(-\lambda) - 2 = (1 + \lambda)(\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 \rightarrow \lambda_{1,2} = -2, 1$$

Thus, $(0,0)$ is a saddle point (unstable)

$$J(-2, -2) = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -5, -2$$

Thus, $(-2,-2)$ is a nodal sink (stable)

$$J(3, -2) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 5, 3$$

Thus, $(3,-2)$ is a nodal source (unstable)

$$J(0, 1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda(1 + \lambda) + 3 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{11})$$

Thus, $(0,1)$ is a spiral sink (negative real part) (stable).