Naam:

Oefeningentoets Differentiaalvergelijkingen 2022-2023

G0N84A– Deel 2

December 2022 Beschikbare tijd: 1:45 uur

Instructies

1. **Schrijf op elk blad dat je afgeeft je naam (ook het voorblad).**

2. De test bestaat uit 2 vragen.

3. Je mag je cursustekst gebruiken, maar geen uitgewerkte oefenigen, of andere toegevoegde papieren.

4. GSM, laptop, smartphone, of andere elektronica zijn niet toegelaten. Een rekenmachine mag.

5. Je antwoord mag bestaan uit zo veel bladen als je wilt, maar nummer deze, en vergeet niet je naam erop te schrijven.

6. Maak voor elke vraag een apart bundeltje met je antwoord, en geef deze op het einde elk af in de daartoe bestemde doos.

7. De oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Vraag 1

Beschouw het volgende Sturm-Liouvilleprobleem.

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0$$

(i) Argumenteer dat voor alle eigenwaarden $\lambda \geq 1$ geldt. (1 punt)

(ii) Laat zien dat $y(x) = xe^{-x}$ een eigenfunctie is bij eigenwaarde $\lambda = 1$. (1 punt)

(iii) Vind alle overige eigenfuncties, en laat zien dat de eigenwaarden voldoen aan

$$\sqrt{\lambda - 1} = \tan(\sqrt{\lambda - 1})$$

(2 punten)

(iv) Maak een schatting van λ_n voor zeer grote n. (1 punt)

Totaal: 5 punten

i)
We solve the equation, and find that since $r^2+2r+\lambda = 0$ when $r = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\lambda}}{2} = -1\pm\sqrt{1-\lambda}$. This splits into three cases:

$$\lambda < 1, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda > 1$$

We suppose that $\lambda < 1$, and find a contradiction from this. We get as a general solution to the differential equation the following.

$$y(t) = Ae^{(-1+\sqrt{1-\lambda})t} + Be^{(-1-\sqrt{1-\lambda})t}$$

Moreover, $y(0) = 0$, which means $A + B = 0$, yielding

$$y(t) = A(e^{(-1+\sqrt{1-\lambda})t} - e^{(-1-\sqrt{1-\lambda})t})$$

Now, we demand that $y'(1) = 0$. This gives

$$0 = A\left((-1+\sqrt{1-\lambda})e^{-1+\sqrt{1-\lambda}} - (-1-\sqrt{1-\lambda})e^{-1-\sqrt{1-\lambda}}\right)$$

When $A = 0$, we get the trivial solution, so suppose $A \neq 0$. Then we get

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{1-\lambda})e^{-1+\sqrt{1-\lambda}} =&(-1-\sqrt{1-\lambda})e^{-1-\sqrt{1-\lambda}}\\ \frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}} =&e^{-2\sqrt{1-\lambda}}\end{aligned}$$

If we write $\alpha = \sqrt{1-\lambda}$, we are then looking for $\alpha > 0$ such that

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = e^{-2\alpha}$$

A look at the graphs of these functions shows that they do not intersect when $\alpha > 0$.
ii)

$$y'' + 2y' + y = 0 \to r^2 + 2r + 1 = 0 \to r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$$

$$\to y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$$

If we apply the BC's:

$$0 = c_1 e^{-x} + 0 \to c_1 = 0, \quad 0 = c_2 e^{-1} - c_2 e^{-1}$$

so c_2 can be any number.
iii) Now we solve the problem for a general eigenvalue:

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0 \to r^2 + 2r + 1 = 0 \to r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\lambda}}{2} = -1 \pm i\sqrt{\lambda - 1}$$

and so we will have a solution with:

$$y = e^{-x}\Big(c_1 \cos(x\sqrt{\lambda-1}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda-1})\Big)$$

$$y' = -e^{-x}\Big(c_1 \cos(x\sqrt{\lambda-1}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda-1})\Big) + e^{-x}\Big(-\sqrt{\lambda-1}c_1 \sin(x\sqrt{\lambda-1}) + \sqrt{\lambda-1}c_2 \cos(x\sqrt{\lambda-1})\Big)$$

We apply the boundary conditions:

$$0 = \Big(c_1 \cos(0 \cdot \sqrt{\lambda-1})\Big) \to c_1 = 0$$

$$0 = -e^{-1}\Big(c_2 \sin(\sqrt{\lambda-1})\Big) + e^{-1}\Big(\sqrt{\lambda-1}c_2 \cos(\sqrt{\lambda-1})\Big)$$

$$-c_2 \sin(\sqrt{\lambda-1}) + \sqrt{\lambda-1}c_2 \cos(\sqrt{\lambda-1}) = 0 \to -\tan(\sqrt{\lambda-1}) + \sqrt{\lambda-1} = 0$$

So the solution will be:

$$y = e^{-x}\Big(c_2 \sin(x\sqrt{\lambda-1})\Big) \quad \text{in which} \quad \tan(\sqrt{\lambda-1}) = \sqrt{\lambda-1}$$

iv)
The estimations for higher n's:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\lambda-1} = \lim_{n\to\infty} \tan(\sqrt{\lambda-1}) \to \lim_{n\to\infty} \sqrt{\lambda-1} = \frac{\pi}{2} + n\pi \to \lim_{n\to\infty} \lambda = \Big(\frac{\pi}{2} + n\pi\Big)^2 + 1$$

Vraag 2

Beschouw voor een functie $u(x, y, t)$ de vergelijkking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(u)$$

op het domein $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. We identificeren de linker- en rechterwand van Ω, alsook de onder- en bovenwand, en maker er dus een torus van. Dit komt overeen met de volgende randvoorwaarden.

$$\begin{aligned} u(-\pi, y, t) &= u(\pi, y, t), & u(x, -\pi, t) &= u(x, \pi, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-\pi, y, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y, t), & \frac{\partial u}{\partial y}(x, -\pi, t) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi, t) \end{aligned}$$

(i) Welke van de drie volgende situaties beschrijft dit probleem op een periodiek domein? a) Een oplossing van een staande golf, b) het temperatuursverloop, of c) de oplossing van de elektrostatische potentiaal. Leg uit waarom. (0.5 punten)

(ii) Gebruik scheiding van veranderlijken om een grote verzameling (reële) particuliere oplossingen te vinden voor u. (2.5 punten)

(iii) Bepaal de specifieke oplossing als

$$\lim_{t \searrow 0} u(x, y, t) = 1 + \cos(x)\cos(y) + \frac{1}{2}\cos(2x)\cos(2y).$$

(1 punten)

(iv) Hoe zou je de coëfficiënten in de algemene oplossing uit ii) berekenen als de beginvoorwaarden gedefinieerd zijn als

$$\lim_{t \searrow 0} u(x, y, t) = x + y \quad ?$$

Een integrale vorm is voldoende. (1 punt)

Solution:
i) b
ii)

$$u = XYT \to X(x)Y(y)T'(t) = X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t) \to \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y}{Y''}$$

$$\frac{T'}{T} = -(\alpha^2 + \beta^2), \quad \frac{X''}{X} = -\alpha^2, \quad \frac{Y''}{X} = -\beta^2$$

We start solving for

$$\frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

$$X = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$$

$$X' = -\alpha c_1 e^{-\alpha x} + \alpha c_2 e^{\alpha x}$$

According to the boundary conditions:

$$c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = c_1 e^{-\alpha\pi} + c_2 e^{\alpha\pi} \to c_1 = c_2$$

$$-\alpha c_1 e^{\alpha\pi} + \alpha c_2 e^{-\alpha\pi} = -\alpha c_1 e^{-\alpha\pi} + \alpha c_2 e^{\alpha\pi} \to -c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = -c_1 e^{-\alpha\pi} + c_2 e^{\alpha\pi} \to -c_1 = c_2$$

and thus no solution.
Next:

$$X(x) = c_1 x + c_2, \quad X'(x) = c_1$$

$$c_1\pi + c_2 = -c_1\pi + c_2 \to c_1 = 0$$

$$c_1 = c_1$$

so there is a constant solution. Finally:

$$X(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x), \quad X'(x) = \alpha c_1 \cos(\alpha x) - \alpha c_2 \sin(\alpha x)$$

Next, if α is an integer:

$$X(-\pi) = c_2 \cos(-\alpha\pi), \quad X(\pi) = c_2 \cos(\alpha\pi) = -c_2 \cos(\alpha\pi) = X(-\pi)$$

$$X'(-\pi) = \alpha c_1 \cos(-\alpha\pi) = \alpha c_1 \cos(\alpha\pi), \quad X'(\pi) = \alpha c_1 \cos(\alpha\pi) = X'(-\pi)$$

So we have no restrictions on the functions used:

$$X(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$$

The situation will be the same for $Y(y)$ and β, since its equations and BC's are the same:

$$Y(y) = c_3 \sin(\beta y) + c_4 \cos(\beta y)$$

with the same limitation that β is an integer. The time equation then is:

$$T' + (\alpha^2 + \beta^2)T = 0 \to T = c_5 e^{(-(\alpha^2+\beta^2)t)}$$

and the final solution:

$$u(x,y,t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}\Big(A(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)+B(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\Big)\Big(C(\alpha,\beta)\sin(\beta y)+D(\alpha,\beta)\cos(\beta y)\Big)e^{(-(\alpha^2+\beta^2)t)}$$

iii) If out initial value is:

$$\lim_{t\to 0} u(x,y,t) = 1+\cos(x)\cos(y)+\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(2y)$$

then it is clear that:

$$1+\cos(x)\cos(y)+\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(2y) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}\Big(A(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)+B(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\Big)\Big(C(\alpha,\beta)\sin(\beta y)+D(\alpha,\beta)\cos(\beta y)\Big)$$

We match the frequencies, for $\alpha=\beta=0$:

$$1 = B(0,0)D(0,0)$$

Next, for $\alpha=\beta=1$:

$$\cos(x)\cos(y) = \Big(A(\alpha,\beta)\sin(x)+B(\alpha,\beta)\cos(x)\Big)\Big(C(\alpha,\beta)\sin(y)+D(\alpha,\beta)\cos(y)\Big)$$

$$A(1,1) = C(1,1) = 0$$

$$B(1,1)D(1,1) = 1$$

Finally, for $\alpha=\beta=2$, we get

$$\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(2y) = \Big(A(2,2)\sin(2x)+B(2,2)\cos(2x)\Big)\Big(C(2,2)\sin(2y)+D(2,2)\cos(2y)\Big)$$

$$\rightarrow A(2,2) = C(2,2) = 0$$

$$B(2,2)C(2,2) = \frac{1}{2}$$

Otherwise, all other coeffcients are zero.
It follows that the complete solution is given by

$$u(x,y,t) = 1+\cos(x)\cos(y)e^{-2t}+\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(2y)e^{-8t}$$

iv)

$$\lim_{t\to 0} u(x,y,t) = x+y$$

Rewrite the general solution as

$$\begin{aligned} x+y = \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \Big(& C_1(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\sin(\beta y) + C_2(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ & + C_3(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\cos(\beta y) + C_4(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\cos(\beta y)\Big) \end{aligned}$$

Note that for $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarily, we get

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy \Big[\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \Big(& C_1(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\sin(\beta y) + C_2(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\sin(\beta y) + C_3(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ & + C_4(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\cos(\beta y)\Big)\Big] \sin(nx)\sin(my) = \pi^2 C_1(n,m) \\ \int_{\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy \Big[\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \Big(& C_1(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\sin(\beta y) + C_2(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\sin(\beta y) + C_3(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ & + C_4(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\cos(\beta y)\Big)\Big] \cos(nx)\sin(my) = \pi^2 C_2(n,m) \\ \int_{\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy \Big[\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \Big(& C_1(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\sin(\beta y) + C_2(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\sin(\beta y) + C_3(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ & + C_4(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\cos(\beta y)\Big)\Big] \sin(nx)\cos(my) = \pi^2 C_3(n,m) \\ \int_{\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy \Big[\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \Big(& C_1(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\sin(\beta y) + C_2(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\sin(\beta y) + C_3(\alpha,\beta)\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ & + C_4(\alpha,\beta)\cos(\alpha x)\cos(\beta y)\Big)\Big] \cos(nx)\cos(my) = \pi^2 C_4(n,m) \end{aligned}$$

Since we know the expression in the brackets is just $x+y$, we can substitute to find the following.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy (x+y)\sin(nx)\sin(my) =& C_1(n,m) \\ \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy (x+y)\cos(nx)\sin(my) =& C_2(n,m) \\ \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy (x+y)\sin(nx)\cos(my) =& C_3(n,m) \\ \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy (x+y)\cos(nx)\cos(my) =& C_4(n,m) \end{aligned}$$

And by calculating these integrals, we get the desired form of u.