

Examen Differentiaalvergelijkingen

Door Herbert McEigenwaardechoke

24 Januari 2025

Disclaimer

Dit examen stond op 12 punten, ongeveer gelijk verspreid over de 5 vragen. Studenten hadden 3 uur de tijd om dit examen te maken, of dus 4 uur met faciliteiten.

Elke vraag heeft ook een oplossing door de auteur op de volgende pagina, neem deze echter met een korreltje zout omdat de auteur klaarblijkelijk aangetoond heeft niet te kunnen rekenen.

Vraag 1

a) Zet de tweede orde differentiaalvergelijking

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

om naar een Sturm-Liouvilleprobleem

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = F(x). \quad (2)$$

Bepaal hiervoor $p(x)$, $q(x)$ en $F(x)$ in functie van $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ en $f(x)$.

Hint: Het kan helpen om (1) te vermenigvuldigen met een nog te bepalen factor $\mu(x)$.

b) Zet de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' + xy' + 2y = 0$$

om naar een Sturm-Liouvilleprobleem.

Oplossing Vraag 1

a) Door

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = F(x)$$

te vereenvoudigen vind je $p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = F(x)$. Door (1) te vermenigvuldigen met $\mu(x)$ en dan de termen te groeperen vind je

$$\begin{cases} p(x) = a_0(x)\mu(x), \\ p'(x) = a_1(x)\mu(x), \\ q(x) = a_2(x)\mu(x), \\ F(x) = f(x)\mu(x). \end{cases}$$

De eerste en tweede gelijkheid levert dat

$$p'(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}p(x) \quad \text{als} \quad a_0(x) \neq 0.$$

Dit kan je oplossen naar $p = \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right)$. Je kan de integratieconstante vrij kiezen. Hieruit volgt $\mu = \frac{1}{a_0} \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right)$. Zo vind je voor

$$\begin{cases} p = \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right), \\ q = \frac{a_2}{a_0} \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right), \\ F = \frac{f}{a_0} \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right). \end{cases}$$

Je kan controleren dat dan (2) impliceert dat

$$\exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right) y'' + \frac{a_1}{a_0} \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right) y' + \frac{a_2}{a_0} \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right) y = \frac{f}{a_0} \exp\left(\int \frac{a_1}{a_0} dx\right)$$

zodat na schrapping van de exponentiële en vermenigvuldiging met a_0 vergelijking (1) bekomen wordt.

b) Gebruik deelvraag a) zodat

$$p(x) = e^{\int \frac{x}{x^2} dx} = x.$$

Dan is $q(x) = \frac{2}{x}$ en $F = 0$. De omzetting naar Sturm-Liouville is dan

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{2}{x} y = 0.$$

Vraag 2

a) Zij A een $n \times n$ -matrix zodat $A^2 = \alpha A$ met $\alpha \neq 0$. Bewijs dat

$$e^{Ax} = I_n + \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} A.$$

b) Los volgend beginvoorwaardenprobleem op:

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} y(x) \quad \text{met} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Oplossing Vraag 2

a) Als $A^2 = \alpha A$ is $A^k = \alpha^{k-1}A$, dus is

$$\begin{aligned}\alpha e^{Ax} &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!}, \\ &= \alpha I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \frac{A^k x^k}{k!}, \\ &= \alpha I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \frac{\alpha^{k-1} A x^k}{k!}, \\ &= \alpha I_n + A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k x^k}{k!}, \\ &= \alpha I_n + (e^{\alpha x} - 1)A.\end{aligned}$$

Aangezien $\alpha \neq 0$ is dus

$$e^{Ax} = I_n + \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} A.$$

b) De oplossing wordt gegeven door $y(x) = e^{Ax}y(0)$ waar A de matrix uit de opgave is. Bemerkt dat

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Met deelvraag a) wordt de matrix exponentiele dan eenvoudigweg gegeven door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - e^{-x}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-x} & 1 - e^{-x} \\ 1 - e^{-x} & 1 & 1 - e^{-x} \\ e^{-x} - 1 & e^{-x} - 1 & 2e^{-x} - 2 \end{pmatrix}.$$

Dan is dus

$$y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-x} & 1 - e^{-x} \\ 1 - e^{-x} & 1 & 1 - e^{-x} \\ e^{-x} - 1 & e^{-x} - 1 & 2e^{-x} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5e^{-x} \\ 6 - 4e^{-x} \\ 9e^{-x} - 6 \end{pmatrix}$$

Vraag 3

Los volgend beginvoorwaardenprobleem op:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2} \quad \text{met} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Oplossing Vraag 3

Ten eerste is er geen juiste of foute manier om dit op te lossen. Ik heb het opgelost via de methode op pagina 18 en 19 van de cursus over lineaire eerste orde vergelijkingen zodat met

$$\rho(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x} dx\right) = x^2$$

de oplossing gegeven wordt door

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\rho(x)} \left(\int \rho(x) \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right), \\ &= x^{-2} \left(\int \cos(x) dx \right), \\ &= \frac{\sin(x) + c}{x^2}. \end{aligned}$$

De beginvoorwaarde levert de oplossing

$$y(x) = \frac{\sin(x) - 1}{x^2}.$$

Vraag 4

Beschouw een oneindige plaat met $0 < x < 1$ en $y \geq 0$. We willen hier de vergelijking van Laplace op oplossen om de temperatuur in evenwicht te bepalen. Veronderstel dat de linker- en rechterkant van de plaat perfect geïsoleerd zijn, dit betekent dat de warmtestroom er gelijk is aan nul. Neem ook aan dat de oplossing begrensd is en de temperatuur aan de onderkant van de plaat gegeven wordt door $f(x)$.

- a) Vertaal de vraagstelling naar een gepast randvoorwaardeprobleem.
- b) Geef de algemene oplossing van dit probleem door scheiding van veranderlijken¹.
- c) Pas de randvoorwaarden uit a) toe om de uitkomst voor dit specifiek probleem te vinden.

¹In de vraagstelling staat pas bij c) om de randvoorwaarden toe te passen, als je echter geen enkele randvoorwaarde gebruikt vind je dan een oplossing die enorm algemeen is en bijvoorbeeld nooit aan bod gekomen is in een oefenzitting of les. Bijgevolg heb ik al enkele randvoorwaarden toegepast in b) om dan de rest in c) te gebruiken.

Oplossing Vraag 4

a) De vergelijking van Laplace is $\Delta u = 0$, dus beschouw voor $0 < x < 1$ en $y \geq 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

De geïsoleerdheid van de linker- en rechterrandaan impliceert

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y).$$

Verder is ook $u(x, y) < \infty$ en $u(x, 0) = f(x)$.

b) Stel $u(x, y) = X(x)Y(y)$, verder genoteerd als XY . Dan is

$$\frac{X''}{X} = -\lambda = -\frac{Y''}{Y}.$$

Als $\lambda = 0$, is $X(x) = ax + b$. Nu begrijp ik niet of ik randvoorwaarden mag toepassen of niet. Zo niet vind je $Y(y) = cy + d$, en heb je dus een oplossing $u(x, y) = (ax + b)(cy + d)$. Aangezien ik dit nog nooit gezien heb, heb ik maar besloten om hier al de randvoorwaarden op X toe te passen². Zo vind je voor zowel $\lambda = 0$ als $\lambda < 0$ enkel triviale oplossingen met $X'(0) = 0 = X'(1)$. De enige niet triviale oplossing komt als $\lambda > 0$ Dan is $\lambda = \alpha^2$ zodat $X(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$ en $X'(x) = \alpha A \cos(\alpha x) - \alpha B \sin(\alpha x)$. $X'(0) = 0 = X'(1)$ levert $A = 0$ en oftewel $B = 0$ of $\alpha = \pi n$ met $n \in \mathbb{Z}$. Dus is $X(x) = B \cos(\pi n x)$ een niet triviale oplossing. Dan is $Y(y) = C e^{\pi n y} + D e^{-\pi n y}$ zodat mijn algemene oplossing gegeven wordt door

$$u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cos(\pi n x) (a_n e^{\pi n y} + b_n e^{-\pi n y}).$$

c) Ten eerste geeft begrenzing dat als de exponent positief is, dat de bijhorende coëfficiënt a_n of b_n nul moet zijn. Dan kunnen we $u(x, y)$ vereenvoudigen tot $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\pi n x) e^{-\pi n y}$. Dan geeft tenslotte

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\pi n x)$$

zodat

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\pi n x) e^{-\pi n y} \quad \text{met} \quad c_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(\pi n x) dx.$$

²Als je geen randvoorwaarden gebruikt, vind je een algemene oplossing als som van drie sommen/integralen, elk één voor λ gelijk, groter, of kleiner dan nul.

Vraag 5

Zet de tweede orde differentiaalvergelijking

$$x'' = -x + x^3$$

om naar een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Maak van dit stelsel een faseportret en karakteriseer de aard en stabiliteit van mogelijke kritieke punten.

Oplossing Vraag 5

Neem $y = x'$. Dan is de differentiaalvergelijking equivalent met

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + x^3. \end{cases}$$

Als $(x', y') = (0, 0)$, is $(x, y) = (0, 0)$, $(1, 0)$ of $(-1, 0)$.

Het punt $(0, 0)$: De linearisatie is hier

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Dit is het moment dat je aantoonst dat je slimmer bent dan de auteur van dit document, omdat jij wel inziet dat de eigenwaarden van deze matrix i en $-i$ zijn. De auteur heeft hier gewoon gezegd dat de eigenwaarden 1 en -1 zijn, dit komt omdat hij af en toe domme dingen zegt. De *juiste* karakterisatie is dus een centrum, en dat is stabiel.

Het punt $(1, 0)$: Voer eerst de substitutie $u = x - 1$ uit. Dan krijgen we

$$\begin{cases} u' = y, \\ y' = u^3 - 3u^2 + 2u. \end{cases}$$

Hier levert linearisatie

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Als je hier doorhebt dat de eigenwaarden $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ zijn, heb je wederom je superieur intellect tegenover dat van de auteur gebruikt. Dit kritiek punt is dus een zadelpunt en bijgevolg onstabiel. De eigenvectoren zijn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{respectievelijk.}$$

Deze geven de asymptoten van het zadelpunt aan.

Het punt $(-1, 0)$: Voer nu de substitutie $u = x + 1$ uit. Dan is

$$\begin{cases} u' = y, \\ y' = u^3 + 3u^2 + 2u. \end{cases}$$

De linearisatie is hier ook

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Analoog³ is ook dit kritiek punt een zadelpunt en bijgevolg onstabiel. Ook de eigenvectoren zijn hetzelfde.

Ten slotte nog het faseportret⁴ tekenen op de volgende pagina, dit heb ik eventjes met Python gedaan⁵. Hier zijn alle pijltjes genormaliseerd.

³Ook analoog heeft de auteur dit voor zichzelf compleet verneukt.

⁴Dat er bij mij dus compleet anders uit zag omdat ik kei hard brakke.

⁵Shoutout naar Calculus I

