Differentiaalvergelijkingen

(31/01/2011 (14u-19u))

Theorie

Theorie Van Assche

$\boxed{1}$ Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y(x) = 0.$$

(a) Los deze vierde orde differentiaalvergelijking op met de technieken die we geleerd hebben in hoofdstuk 2.

(b) Zet deze differentiaalvergelijking om naar een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Los dit stelsel op met de eigenwaardemethode.

(c) Zoek een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y(x) = e^x.$$

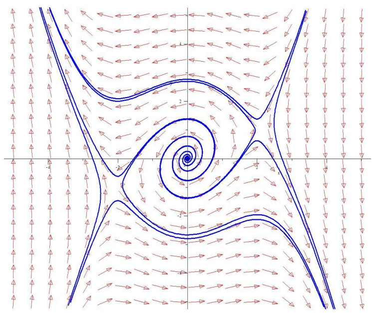
$\boxed{2}$ Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} x' &= x - 2y \\ y' &= ax - x^3 \end{cases}$$

met a een parameter.

(a) Bepaal de kritieke punten van het stelsel.

(b) Gegeven onderstaand faseportret. Bepaal de waarde van a zo dat het portret er zo uitziet.



Theorie Fannes

$\boxed{1}$ Beschouw een $n \times n$-matrix met complexe waarden. Een differentiaalvergelijking wordt geschreven als

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{f} \qquad \text{met } \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0. \tag{1}$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{At}.$$

Men kan de Laplacegetransformeerde van $\mathbf{f}$ opvatten als de Laplacegetransformeerde van elke component. Hiervoor gaan we er nu van uit dat elke component van $\mathbf{f}$ van exponentiële orde is. Als we s nemen zo dat $\Re(s)$ zeer groot is. Zo wordt de Laplacegetransformeerde gegeven door

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathbf{f}(t)e^{-st}.$$

(a) Bepaal de Laplacegetransformeerde van (1).

(b) Los deze vergelijking op.

(c) Verifieer dat je dezelfde uitkomst bekomt door de Laplacegetransformeerde te bepalen van $t \mapsto e^{At}\mathbf{f}_0$.

$\boxed{2}$ Los de vergelijking van Laplace op voor een ring in $\mathbb{R}^2$ met $r_1 < r < r_2$. De waarden op de rand worden beschreven door functies.
Geen functies gegeven. Werk algemeen.

Oefeningen

$\boxed{1}$ Bepaal twee Frobeniusoplossingen van

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0.$$

Vereenvoudig zo veel mogelijk.

$\boxed{2}$ Een horizontaal gespannen touwtje maakt transversale trillingen onder invloed van de zwaartekracht. De uitwijking van het touw y voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x(1-x) \qquad \text{met } 0 < x < 1 \text{ en } t > 0$$

met randvoorwaarden

$$y(0,t) = y(1,t) = y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

(a) Bepaal een statische (=tijdsonafhankelijke) oplossing $y_{\text{stat}} = \phi(x)$ van de differentiaalvergelijking.

(b) Als nu $u(x,t) = y(x,t) - \phi(x)$. Geef dan de rand -en beginvoorwaarden van dit probleem.

(c) Geef de oplossing van $y(x,t)$ in een reeks. De coëfficiënten moet je niet expliciet bepalen.

(d) Wat is de maximale uitwijking van y?