

Differentiaalvergelijkingen

Tussentijdse toets I — 5 november 2024

Beschikbare middelen: niet-grafisch rekenmachine, een specifieke slide uit de PowerPoint (zie bijgevoegde pagina), de cursusnota's zonder eigen notities en (slechts!) negentig minuten van je kostbare tijd

Opgave 1 (4 punten)

Beschouw voor een $\alpha \in \mathbb{R}$ het stelsel

$$\begin{cases} x' = \alpha - x + y - \frac{1}{4}(x+y)^2 \\ y' = \alpha + x - y - \frac{1}{4}(x+y)^2 \end{cases} \quad (1)$$

- (1pt.) Bepaal hoeveel kritieke punten dit stelsel heeft voor $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ en $\alpha < 0$.
- (1pt.) We beschouwen de lineaire transformatie $x = p + q$, $y = p - q$. Toon aan dat het stelsel onder deze transformatie omgezet wordt in

$$\begin{cases} p' = \alpha - p^2 \\ q' = -2q \end{cases} \quad (2)$$

- (2pt.) Schets het stelsel 1 in het (x, y) -fasevlak als het stelsel 2 in het (p, q) -fasevlak voor $\alpha = \frac{1}{9}$. Als er kritieke punten zijn, duid deze dan duidelijk aan en benoem ook om welk soort kritiek punt het gaat.

Opgave 2 (6 punten)

Beschouw $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (1pt.) Bereken de eigenwaarden van A .
- (2pt.) Geef de Jordannormaalvorm van A en de overeenkomstige basis waartegenover A in Jordannormaalvorm staat.
- (1pt.) Geef de algemene oplossing van $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$.
- (1pt.) Noem de beginvoorwaarde voor bovenstaande differentiaalvergelijking $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Voor welke $\mathbf{y}_0$ zal gelden dat $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} \mathbf{y}_0 = 0$?
- (1pt.) Ga nu na dat

$$\left\{ \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^3 \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At} \mathbf{y}_0 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad (3)$$

Pro tip: bemerk dat het in die laatste vraag dus gaat over t gaande naar *min* oneindig, wees niet zoals de auteur van dit documentje en staar u daar niet een half uur op blind.

Poincaré Diagram: Classification of Phase Portraits in the $(\det A, \text{Tr } A)$ -plane

