Oefeningentoets Differentiaalvergelijkingen, deel 1

dinsdag 6 november 2018 in lokaal 200M 00.07 van 16:00 tot 18:00u

Beste student,

Deze oefeningentoets bevat twee oefeningen betreffende het tweede deel van de cursus Differentiaalvergelijkingen.

Schrijf je naam op elk blad dat je afgeeft (ook het voorblad!).

Je mag je cursustekst gebruiken maar geen uitgewerkte oefeningen. Ook een rekenmachine (geen GSM of smartphone) is toegelaten. Geef het antwoordblad af waarbij je zoveel bladen mag toevoegen als je nodig hebt. De oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Naam:

Vraag 1: Gegeven het volgende populatiesysteem:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 12x - 2x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 8y - 4y^2 + 2xy\end{aligned}$$

a) *(1 pt)* Beschrijf de aard van de interactie tussen de populaties x en y.

b) *(2 pt)* Vind alle kritieke punten en beschijf hun aard.

c) *(2 pt)* Gegeven het punt (3, 0). Hoe zal dit punt zich gedragen in de tijd? Zal het convergeren naar één van de kritieke punten? Zo ja, welk en waarom?
Wat gebeurt als je in het punt (3, 1) vertrekt?

Uitwerking:

a) Dit is een jager-prooi situatie. Hierbij is x de prooi en y de jager.

b) De kritieke punten kunnen we vinden door het stelsel

$$\begin{cases} 12x - 2x^2 - xy = 0 \\ 8y - 4y^2 + 2xy = 0 \end{cases} \tag{1}$$

op te lossen. De kritieke punten zijn $K(0,0), K(0,2), K(6,0), K(4,4)$.
Een manier om hun aard te bepalen is door gebruik te maken van de Jacobiaan. (Een gelineariseerd stelsel lukt ook.)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x} & \frac{\partial f(x)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x} & \frac{\partial g(x)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 4x - y & -x \\ 2y & 8 - 8y + 2x \end{pmatrix}$$

We berekenen de eigenvectoren voor ieder kritiek punt. Aan de hand van deze waarden kunnen we hun aard bepalen:

1. Voor $K(0,0)$ is $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 8$, een onstabiele bron.
2. Voor $K(0,2)$ is $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -8$, een onstabiel zadelpunt
3. Voor $K(6,0)$ is $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = -12$, een onstabiel zadelpunt
4. Voor $K(4,4)$ is $\lambda_1 = -12 + 4i, \lambda_2 = -12 - 4i$, een (asymptotisch) stabiel spiraalpunt.

c) Om de verandering van het gegeven punt in de tijd te zien vullen we de waarden in in het stelsel differentiaalvergelijkingen. Voor het punt $(3,0)$ kunnen we zien dat $dy/dt = 0$, dus de y-waarde zal nooit meer veranderen, enkel de x-waarde. Sinds het punt (0,0) een bron is zal het nooit naar dat kritiek punt convergeren, waardoor het uiteindelijk zal convergeren naar het kritieke punt (6,0).
Voor het punt $(3,1)$ merken we eerst op dat oplossingen die door de x-as of de y-as gaan ook op die assen blijven. Dit betekent dat een oplossing met $x(0) \geq 0$ en $y(0) \geq 0$ zal voldoen aan $x(t) \geq 0$ en $y(t) \geq 0$ voor alle $t \geq 0$ (je kunt niet dwars door de assen heen). Voor de oplossing met $x(0) = 3$ en $y(0) = 1$ houdt dit in dat

$$\frac{dx}{dt} = 12x - 2x^2 - xy \leq 12x - 2x^2$$

en dat betekent dat $x(t)$ niet naar oneindig kan lopen als $t \to \infty$ (omdat de afgeleide negatief zou worden). Er bestaat dus een $C > 0$ zodanig dat $x(t) \leq C$ voor alle $t \geq 0$. Dan hebben we dat

$$\frac{dy}{dt} = 8y - 4y^2 + 2xy \leq (8 + 2C)y - y^2$$

en we beredeneren analoog dat ook y begrensd moet zijn. We concluderen dat $(x(t), y(t))$ naar $(6,0), (0,2)$ of $(4,4)$ moet convergeren. Een oplossing kan alleen naar een van de zadelpunten convergeren als de oplossing zich uitsluitend op de x-as of op de y-as bevindt. We besluiten dus dat $(x(t), y(t))$ naar het spiraalpunt $(4,4)$ moet convergeren.

Naam:

Vraag 2: Beschouw de volgende differentiaalvergelijking

$$2(x^2 - x)f'(x) + 3(x+1)f(x) = \frac{x}{1-x}. \tag{2}$$

a) *(2 pt)* Gebruik de machtreeksmethode (en dus **niet** een andere methode) om een particuliere oplossing van (2) in de buurt van $x = 0$ te vinden.

b) *(1 pt)* Toon aan dat de machtreeks inderdaad een positieve convergentiestraal heeft. *Hint: toon aan dat de coefficienten een ondergrens hebben en bovendien niet sneller kunnen groeien dan* 5^n.

c) *(2 pt)* Geef de algemene oplossing van (2) op een (klein) interval $(0, c)$ met $c > 0$. Over het algemeen heb je wat vrijheid in het kiezen van een particuliere oplossing, waarom gaf de machtreeksmethode ons niet meerdere oplossingen?

Opmerking: bij vraag (c) geldt het verbod uit (a) niet, elke methode is toegestaan.

Uitwerking:

a) We proberen een machtreeks $f_p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$. Invullen in (2) geeft dan

$$3a_0 + (-2a_1 + 3a_0 + 3a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} (2(n-1)a_{n-1} - 2na_n + 3a_{n-1} + 3a_n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Er volgt onmiddelijk dat $a_0 = 0$ en $a_1 = 1$. Voor $n \geq 2$ hebben we de recurrentie $(1 + 2n)a_{n-1} + (3 - 2n)a_n = 1$ en dit heeft een unieke oplossing.

b) We kunnen de recurrentierelatie suggestiever schrijven als

$$a_n = \frac{2n+1}{2n-3} a_{n-1} - \frac{1}{2n-3}, \qquad n \geq 2.$$

We kunnen inductief aantonen dat $a_n \geq 1$ voor alle $n \geq 1$. We weten al dat $a_1 \geq 1$. Als $a_{n-1} \geq 1$ voor een $n \geq 2$, dan geldt er dat

$$a_n = \frac{2n+1}{2n-3} a_{n-1} - \frac{1}{2n-3} \geq \frac{2n+1}{2n-3} - \frac{1}{2n-3} = \frac{2n}{2n-3} \geq 1.$$

We concluderen dat $a_n \geq 1$ voor alle $n \geq 1$. Anderzijds hebben we

$$a_n \leq \frac{2n+1}{2n-3} a_{n-1} \leq \left(1 + \frac{4}{2n-3}\right) a_{n-1} \leq 5a_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Hierbij gebruikten we dat de a_n niet-negatief zijn. Er geldt nu $a_n \leq 5^{n-1} a_1 \leq 5^n$. We concluderen dat $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 5$, dus de convergentiestraal is minstens $\frac{1}{5}$.

c) De algemene oplossing is van de vorm $f(x) = f_p(x) + \alpha f_h(x)$ met $\alpha \in \mathbb{R}$. Hierin is f_h een oplossing van de homogene vergelijking en die kunnen we met scheiding van variabelen omschrijven naar

$$\frac{f_h'(x)}{f_h(x)} = \frac{3}{2} \frac{1+x}{x(1-x)} = \frac{3}{2x} + \frac{3}{1-x}.$$

Integreren en exponentiëren geeft (tot op een constante factor)

$$f_h(x) = \frac{x\sqrt{x}}{(1-x)^3}.$$

Als we meerdere machtreeksoplossingen rond $x = 0$ kunnen vinden van (2) dan is hun verschil een machtreeks (ongelijk aan 0) rond $x = 0$ die de homogene differentiaalvergelijking oplost. Dit is in ons specifieke geval niet mogelijk, omdat de homogene oplossingen (ongelijk aan 0) niet analytisch zijn in $x = 0$.

Opmerking bij a): *Het is hier ook mogelijk om* (2) *in zijn geheel te vermenigvuldigen met* $1 - x$. *Het toepassen van de machtreeksmethode wordt dan iets ingewikkelder en we krijgen* $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4$ *en* $(1-2n)a_{n-2} + (4n-4)a_{n-1} + (3-2n)a_n = 0$ *voor* $n \geq 3$. *Dit was eigenlijk niet de bedoeling maar je kunt er het maximale puntenaantal mee behalen.*

Opmerking bij b): *Als je eenmaal weet dat* $a_n \geq 1$ *voor* $n \geq 1$ *dan had je als alternatief ook met de ratiotest aan kunnen tonen dat de convergentiestraal 1 is.*
Nog een alternatief: je had kunnen uitrekenen dat $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9$. *We krijgen dan het vermoeden dat* $a_n = n^2$ *en dit is inderdaad gemakkelijk met inductie aan te tonen. Dan is het ook duidelijk dat* $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, *en dus de convergentiestraal, 1 is.*

Opmerking bij c): *Het is mogelijk om de particuliere oplossing in gesloten vorm uit te drukken (bijvoorbeeld met een integrerende factor). We hebben dan als algemene oplossing*

$$f(x) = \frac{x + x^2 + \alpha x\sqrt{x}}{(1-x)^3}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$