

Oefeningentoets Differentiaalvergelijkingen, deel 2
woensdag 19 december 2018 in lokaal 200M 00.07 van 10:30 tot 12:30u

Beste student,

Deze oefeningentoets bevat twee oefeningen betreffende het tweede deel van de cursus Differentiaalvergelijkingen.

Schrijf je naam op elk blad dat je afgeeft (ook het voorblad!).

Je mag je cursustekst gebruiken maar geen uitgewerkte oefeningen. Ook een rekenmachine (geen GSM of smartphone) is toegelaten. Geef het antwoordblad af waarbij je zoveel bladen mag toevoegen als je nodig hebt. De oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Naam:

Vraag 1: Beschouw het volgende eigenwaardeprobleem op $(0, \pi)$

$$-y''(x) + 2y'(x) - y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

- a) (1 pt) Bewijs dat het eigenwaardeprobleem van Sturm-Liouville type is en dat deze bovendien regulier is.
- b) (1 pt) Geef alle eigenwaarden λ_n en bijbehorende eigenfuncties $y_n(x)$.
- c) (1 pt) Geef de oplossing op heel $\mathbb{R}$ van het randvoorwaardeprobleem

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 1, \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

- d) (2 pt) Bewijs dat $f(x)$ op $(0, \pi)$ te schrijven is als een (oneindige) lineaire combinatie van eigenfuncties $y_n(x)$ en bereken de coëfficiënten van die combinatie.
Bewijs vervolgens de identiteit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k^2+2k+1)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \cosh(\pi/2)}.$$

Opmerking. Om het rekenwerk wat makkelijker te maken geven we je dat

$$\int e^{-x} \sin(ax) dx = -e^{-x} \frac{\sin(ax) + a \cos(ax)}{a^2 + 1} + \text{constante}$$

voor elk reële getal a . Dit hoeft je niet aan te tonen.

Uitwerking:

- a) We kunnen $p(x) = -q(x) = r(x) = e^{-2x}$ nemen. Deze zijn inderdaad continu op $[0, \pi]$, bovendien zijn p en r positief en p' is continu uit te breiden naar $[0, \pi]$.
- b) Stel $\lambda > 0$. Dan kunnen we schrijven $\lambda = n^2$ voor een $n \in (0, \infty)$. De differentiaalvergelijking $y''(x) - 2y'(x) + (1 + \lambda)y(x) = 0$ heeft dan als algemene oplossing $y(x) = e^x(A \cos(nx) + B \sin(nx))$. De randvoorwaarden geven ons dan dat $A = 0$ en dat n een natuurlijk getal moet zijn. We krijgen dan eigenfuncties $y_n(x) = e^x \sin(nx)$ met eigenwaarden $\lambda_n = n^2$ (en $n \in \mathbb{N}$). Voor $\lambda < 0$ en $\lambda = 0$ kun je door expliciet invullen nagaan dat er geen eigenfuncties bestaan.
- c) Een particuliere oplossing wordt gegeven door $f^p(x) = 1$. De algemene oplossing van het homogene probleem is $f^h(x) = (A + Bx)e^x$. Om de randvoorwaarden te laten kloppen moeten we $A = -1$ en $B = (1 - e^{-\pi})/\pi$ nemen. We krijgen dan dus

$$f(x) = 1 - e^x + \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} x e^x.$$

- d) Laten we schrijven

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x) = e^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx).$$

Dan voldoet f meteen al aan de randvoorwaarden, omdat alle eigenfuncties aan de randvoorwaarden voldoen. Er moet ook gelden dat

$$1 = f''(x) - 2f'(x) + f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (y_n''(x) - 2y_n'(x) + y_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-\lambda_n y_n(x)).$$

We moeten dus coëfficiënten $b_n = n^2 a_n$ vinden zodanig dat op $(0, \pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = -e^{-x}.$$

We breiden $-e^{-x}$ uit tot een oneven functie op $(-\pi, \pi)$. Dan hebben we

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[e^{-x} \frac{\sin(nx) + n \cos(nx)}{n^2 + 1} \right]_0^{\pi} = -2n \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{\pi(n^2 + 1)}.$$

We vinden dus voor alle $x \in (0, \pi)$

$$1 - e^x + \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} x e^x = f(x) = -\frac{2}{\pi} e^x \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n e^{-\pi}) \frac{\sin(nx)}{n(n^2 + 1)}$$

Invullen van $x = \frac{\pi}{2}$ geeft

$$\begin{aligned} 1 - \cosh(\pi/2) = f(\pi/2) &= -\frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (-1)^{2k+1} e^{-\pi}) \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)((2k+1)^2 + 1)} \\ &= -\frac{2 \cosh(\pi/2)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k^2 + 2k + 1)}, \end{aligned}$$

en de gevraagde identiteit volgt.

Naam:

Vraag 2: Gegeven is een buis van lengte L en u de deeltjesdichtheid in de buis, beschreven volgens de volgende vergelijking en begin- en randvoorwaarden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ met } 0 < x < L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$hu(L, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4)$$

met $f(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$ een willekeurig vaak differentieerbare functie en $h > 0$.

- a) (1 pt) Beschrijf in woorden wat het bovenstaande probleem voorstelt. Dit wil zeggen, geef een interpretatie voor elk van de vier vergelijkingen.
- b) (2 pt) Toon aan dat, voor zekere coëfficiënten c_n , de oplossing gegeven wordt door

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right) \cos\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)$$

met $\beta_1 < \beta_2 < \dots$ de positieve wortels van de vergelijking $z \tan(z) = hL$.

- c) (2 pt) Toon aan dat

$$c_n = \frac{2h}{hL + \sin^2 \beta_n} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) dx.$$

Uitwerking:

- a)
- De eerste vergelijking beschrijft de diffusie van deeltjes in een 1-dimensionale buis van lengte L . (.25 pt)
 - Vergelijking (2) zegt dat het uiteinde van de buis op $x = 0$ er een stroom van deeltjes is die gelijk is aan 0. (.25 pt)
 - Vergelijking 3 beschrijft dat op het punt L van de buis er een deeltjesstroom is en een oneindig volume met een bepaalde deeltjesdichtheid, die h keer . (.25 pt)
 - Vergelijking (4) zegt dat de deeltjesdichtheid in de buis op elk punt wordt beschreven door $f(x)$. (.25 pt)
- b) We beginnen met scheiding van veranderlijken om volgende vergelijking te komen:

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

We lossen de Sturm-Liouville vergelijking op voor verschillende waarden van λ : $\lambda = -b^2$, met $b > 0$: We vinden dat voor de oplossing

$$X(x) = Ae^{-bx} + Be^{bx}$$

er enkel de nuloplossing is.

$\lambda = 0$: Voor de vergelijking $X(x) = Ax + B$ is $B = 0$ en $A = 0$, dus enkel de nuloplossing bestaat.

$\lambda = b^2$, met $b > 0$: Dan is

$$X(x) = A \cos(bx) + B \sin(bx)$$

Uit de eerste rvw vinden we dat $B = 0$. De tweede vergelijking geeft ons dat

$$\begin{aligned} hA \cos(bL) - kA \sin(bL) &= 0 \\ \frac{h}{b} &= \tan(bL) \end{aligned}$$

Stel dan $z = bL$, dan verandert de vergelijking naar

$$hL = z \tan(z)$$

Laat $\{\beta_n\}_1^\infty$ de waarden van z zijn waarvoor bovenstaande vergelijking geldt (de positieve wortels van de vergelijking), dan vinden we dat $b_n = \frac{\beta_n}{L}$. Dus

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)$$

De oplossing voor $T(t)$ is dan gegeven door

$$T_n(t) = B_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2}{L^2} kt\right)$$

en de totale oplossing door

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\beta_n^2}{L^2} kt\right).$$

c) Als laatste kunnen we dan de beginvoorwaarde gebruiken:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)$$

of

$$c_n = \frac{\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) dx}{\int_0^L \cos^2\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) dx}$$

Nu is

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos^2\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \left(L + \frac{L}{2\beta_n} \sin 2\beta_n \right) = \frac{1}{2h} \left(hL + \sin \beta_n \frac{hL \cos(\beta_n)}{\beta_n} \right) \\ &= \frac{1}{2h} (hL + \sin^2 \beta_n) \end{aligned}$$

waar we in de laatste stap gebruik maken van

$$hL/\beta_n = \tan(\beta_n) \implies hL \cos(\beta_n)/\beta_n = \sin(\beta_n)$$

en vinden we de oplossing.