Oefeningentoets Differentiaalvergelijkingen, deel 1
dinsdag 5 november 2019 in lokaal 200M 00.07 van 16:00 tot 18:00u

Beste student,

Deze oefeningentoets bevat twee oefeningen betreffende het tweede deel van de cursus Differentiaalvergelijkingen.

Schrijf je naam op elk blad dat je afgeeft (ook het voorblad!).

Je mag je cursustekst gebruiken maar geen uitgewerkte oefeningen. Ook een rekenmachine (geen GSM of smartphone) is toegelaten. Geef het antwoordblad af waarbij je zoveel bladen mag toevoegen als je nodig hebt. De oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Naam:

Vraag 1: Beschouw het volgende systeem van differentiaalvergelijkingen.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - y^2 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 - 4 \end{cases}$$

a) *(2 pt)* Vind alle kritieke punten en beschijf hun aard.

b) *(3 pt)* Schets enkele oplossingen in het $(x, y)-$vlak, genoeg om een beeld te krijgen van het algemene verloop van oplossingen. Geef daarbij ook de richting aan (naarmate t groter wordt).

Nota bene: Het is bij vraag b) niet de bedoeling om een gedetailleerd meesterwerk te maken, maar het moet duidelijk zijn hoe de oplossingen zich algemeen gedragen. We raden aan dat je in ieder geval de oplossingen schetst die door $(1, 0), (0, 0)$ en $(0, 2)$ lopen. Je hoeft in principe geen redeneringen te geven voor je schets, maar als je schets onduidelijk is dan kunnen we eventueel alsnog punten toekennen voor je redeneringen.

Uitwerking:

a) De kritieke punten moeten voldoen aan $x^2 - y^2 = 0$ en $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4 = 0$. De eerste vergelijking geeft ons $y = \pm x$. Als we dat invullen in de tweede vergelijking krijgen we $x^2 - 4 = 0$. We vinden dan de vier kritieke punten $(2,2), (-2,-2), (-2,2)$ en $(2,-2)$. Om hun aard te bepalen bekijken we de Jacobiaan. We hebben

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

De bijbehorende eigenwaarden bepalen we dan uit de vergelijking

$$\lambda^2 - (2x+y)\lambda + 4xy = 0.$$

Voor onze vier kritieke punten worden die dan gegeven door

$$\lambda_\pm = x + \frac{1}{2}y \pm \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 3xy} = x + \frac{1}{2}y \pm \sqrt{5 - 3xy}.$$

We vinden dan samenvattend: 1/2 pt voor elk.

punt	Eigenwaarden	Aard
$(2,2)$	$3 \pm i\sqrt{7}$	spiraalpunt (onstabiel)
$(-2,-2)$	$-3 \pm i\sqrt{7}$	spiraalpunt (stabiel)
$(-2,2)$	$-1 \pm \sqrt{17}$	zadelpunt (onstabiel)
$(2,-2)$	$1 \pm \sqrt{17}$	zadelpunt (onstabiel)

b) Uit je schets moeten ten minste de volgende zes dingen duidelijk zijn: 1/2 pt voor elk.

(i) Binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 8$ lopen de oplossingen qua richting naar beneden.

(ii) Buiten de cirkel $x^2 + y^2 = 8$ lopen de oplossingen qua richting naar boven.

(iii) De oplossingen hebben een "knik" in de lijnen $y = x$ en $y = -x$.

(iv) Bij $(2,2)$ lopen de spiralen in positive richting (tegen de klok in).

(v) Bij $(-2,-2)$ lopen de spiralen in negatieve richting (met de klok mee).

(vi) De assen van de twee zadelpunten moeten enigszins kloppen.

De eisen (i) en (ii) volgen simpelweg uit de vergelijking $y' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4$. De knikken bij (iii) volgen uit $x' = x^2 - y^2$, de oplossingen lopen nog steeds naar beneden (binnen $x^2 + y^2 = 8$), maar oplossingen die naar links lopen, lopen nu naar rechts (en vice versa). Je kunt de richtingen bij (iv) en (v) bepalen door de bijbehorende eigenvectoren te berekenen, maar je kunt dit sneller beredeneren door gebruik te maken van eis (iii). Voor (vi) dien je de bijbehorende eigenvectoren te berekenen. Deze zijn voor $(-2,2)$ en $(2,-2)$ respectievelijk:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \mp \sqrt{17} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \pm \sqrt{17} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Vraag 2: Beschouw de volgende differentiaalvergelijking.

$$(1 - x^2)y'' + 2y = xe^{x^2}$$

a) *(3 pt.)* Wat is de recursierelatie voor oplossingen van de vorm $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

b) *(1 pt.)* Bereken de coëfficiënten van de oplossing met beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en van de oplossing met $y'(0) = 1$ tot en met graad 5.

c) *(1 pt.)* Bereken de convergentiestraal van de twee machtreeksoplossingen uit a).

Solution:

a) Filling in y gives us

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n[(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n + 2c_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!} \tag{1}$$

Finding this equation: 1pt

Two cases are possible, odd and even. Let us take $c_0 = 1, c_1 = 0$ and take $n = 2k$. The recursion relation is

$$\begin{aligned} c_{2k+2} &= \frac{2k(2k-1)-2}{(2k+2)(2k+1)} c_{2k} \qquad \text{Correct equation: 1pt} \\ &= \frac{k-1}{k+1} c_{2k}. \end{aligned}$$

Notice that for $k = 0, c_2$ is equal to:

$$c_2 = -c_0$$

and for $k = 1$, c_4 is equal to:

$$c_4 = \frac{2-2}{12} c_2 = 0$$

So the infinite series becomes a finite polynomial of degree 2.

The odd case, we take $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ and $c_0 = 0, c_1 = 1$. The recursion relation is then given by

$$\begin{aligned} c_{2k+3} &= \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} \left(\frac{1}{k!} + ((2k+1)2k - 2)c_{2k+1} \right) \text{Correct equation: 1pt} \\ &= \frac{1}{2k!(2k+3)(k+1)} + \frac{2k-1}{2k+1} c_{2k+1}. \end{aligned}$$

---

b) If $y(0) = 1$, then $c_0 = 1$. The even solution gives the terms

$$y_1(x) = 1 - x^2$$

If $y'(0) = 1$, then $c_1 = 1$. The odd solution gives

$$y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5$$

This gives us the solution

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = 1 + x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5$$

or

$$y(x) = 1 + x - x^2 - 0.16666x^3 + 0.0166666x^5$$

Correct values: 1pt

---

c) Take the even case, or $c_0 = 1, c_1 = 0$. Then we have that

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_4 = c_6 = \cdots = 0 \end{cases} \qquad \text{and} \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_{2k+1} = \frac{1}{(2k)(2k+1)k!} \end{cases} \tag{2}$$

The even terms create a finite polynomial of degree 2 which always converges. The odd terms form the power series

$$\sum \frac{x^{2k+1}}{(2k)(2k+1)k!}$$

This series converges even faster than xe^{x^2}. The resulting series always converges for any x, so

$$R_{y_1} = +\infty$$

Correct radius: 0.5pt

For the odd-case solution, notice that the solution around $x_0 = 0$ has an irregular point at $x = \pm 1$. As a result, we know that the radius of convergence

$$R \geq R_0 = 1.$$

Next, look at the recursion relation

$$c_{2k+3} = \frac{1}{k!(2k+3)(2k+2)} + \frac{2k-1}{2k+3}c_{2k+1}$$

It follows that

$$c_{2k+3} \geq \frac{2k-1}{2k+3}c_{2k+1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

From which a lower bound of the ratio test can be found

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \geq \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{4}{2k+3}\right) = 1$$
$$\frac{1}{R} \geq 1 \iff R \leq 1$$

So it follows that $R \geq 1$ and $R \leq 1$, so $R = 1$.

Stating that $R = 1$: 0.5pt

Correctly finding that $R = 1$: +0.5 bonus points