Oefeningentoets Differentiaalvergelijkingen, deel 2

december 2019.

Beste student,

Deze oefeningentoets bevat twee oefeningen betreffende het tweede deel van de cursus Differentiaalvergelijkingen.

Schrijf je naam op elk blad dat je afgeeft (ook het voorblad!).

Je mag je cursustekst gebruiken maar geen uitgewerkte oefeningen. Ook een rekenmachine (geen GSM of smartphone) is toegelaten. Geef het antwoordblad af waarbij je zoveel bladen mag toevoegen als je nodig hebt. De oefeningen worden verbeterd door de assistenten.

Naam:

Vraag 1: Beschouw het volgende eigenwaardeprobleem op $(0,1)$

$$f''(x) + 2xf'(x) + (1+x^2)f(x) \quad = \quad -\lambda f(x), \quad f'(0) = 0 \text{ en } f(1) + f'(1) = 0.$$

a) *(1 pt)* Bewijs dat het eigenwaardeprobleem van Sturm-Liouville type is en dat deze bovendien regulier is.

b) *(3 pt)* Geef alle eigenwaarden λ_n en bijbehorende eigenfuncties $f_n(x)$.
Hint: vind een substitutie om de differentiaalvergelijking om te vormen naar een lineaire differentiaalvergelijking met constante coefficiënten.

c) *(1 pt)* Schrijf $x^2 - 3$ als een lineaire combinatie van de eigenfuncties $f_n(x)$ met coefficiënten a_n. Normalizeer je eigenfuncties zodanig dat $f_n(0) = 1$. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0.$$

OPMERKING: *Op het examen stond een typo, de randvoorwaarden waren $f'(0) = 0$ en $f'(1) = f(1)$. In dat geval klopt vraag (c) helaas niet. We hebben daarom besloten om vraag (c) te schrappen, vraag (a) wordt dan 2 punten waard. Een handjevol mensen, dat een serieuze poging voor vraag (c) heeft gedaan, heeft nog een $\frac{1}{2}$ bonuspunt gekregen.*

Uitwerking:

(a) We moeten dan functies p, q en r vinden zoals in sectie 8.3 van de cursus. Het is duidelijk dat we dan $p(x) = r(x)$ en $q(x) = -(1+x^2)r(x)$ moeten hebben. Om de juiste differentiaalvergelijking te krijgen moeten we dan nog $p'(x)/p(x) = 2x$ eisen. Dat lukt met $p(x) = e^{x^2}$. Dit legt dan ook vast dat $r(x) = e^{x^2}$ en $q(x) = -(1+x^2)e^{x^2}$. De drie functies zijn oneindig vaak differentieerbaar en p en r zijn strikt positief. De randvoorwaarden zijn homogeen. We hebben dus te maken met een regulier Sturm-Liouville probleem.

(b) We gebruiken de substitutie $g(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} f(x)$. Dan vinden we

$$g''(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(f''(x) + 2xf'(x) + (1+x^2)f(x)\right) = e^{\frac{1}{2}x^2}(-\lambda f(x)) = -\lambda g(x).$$

Alle eigenwaarden zijn positief vanwege stelling 8.3. Het is handig om $\lambda = \beta^2$ te schrijven, met $\beta > 0$. Dan is de algemene oplossing $g(x) = (A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$. De randvoorwaarden $f'(0)$ en $f(1) + f'(1)$ komen overeen met de randvoorwaarden $g'(0) = 0$ en $g'(1) = 0$. Dan vinden we $B = 0$ en $\beta\sin(\beta) = 0$. Er volgt dus $\beta = \pi n$ met $n = 1, 2, \ldots$. We vinden dus de eigenfuncties en eigenwaarden:

$$f_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos(\pi n x), \qquad \lambda_n = \pi^2 n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Opmerking: *met de randvoorwaarde $f'(1) = f(1)$ zou je krijgen*

$$f_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos(\beta_n x), \qquad \lambda_n = \beta_n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

waar $\beta_1, \beta_2, \ldots$ de positieve oplossingen zijn van $\tan(\beta) = -2/\beta$.

(c) We schrijven dus

$$x^2 - 3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos(\pi n x).$$

Dan hebben we de Fourier-reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) = (x^2 - 3)e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Deze mogen we op $(-1, 1)$ beschouwen. De Fourier-coëffiënten worden dan gegeven door

$$a_n = \int_{-1}^{1} (x^2 - 3)e^{\frac{1}{2}x^2}\cos(\pi n x)dx.$$

Driemaal partiëel integreren geeft

$$\begin{aligned} a_n &= -\int_{-1}^{1}\left((x^2-3)e^{\frac{1}{2}x^2}\right)' \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}dx \\ &= \left[\left((x^2-3)e^{\frac{1}{2}x^2}\right)' \frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left((x^2-3)e^{\frac{1}{2}x^2}\right)'' \frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^2}dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left((x^2-3)e^{\frac{1}{2}x^2}\right)''' \frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^3}dx = \mathcal{O}(1/n^3). \end{aligned}$$

We concluderen dat $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

Vraag 2: Gegeven een staaf met lengte van 60 cm en een geisoleerd oppervlak (behalve de uiteinden) en thermische diffusie $k > 0$. Op tijd $t = 0$ wordt de volledige staaf naar 0°C gebracht, behalve één punt in het midden van de staaf, dat verhit wordt tot 1200°C. Dit is beschreven door de beginvoorwaarde $f(x)$:

$$f(x) = 1200\delta(x - 30) \tag{1}$$

Als laatste worden op $t = 0$ de uiteinden van de staaf in ijs van 0° gelegd.
Opmerking: $\delta(x - a)$ is de Dirac delta-functie. Je krijgt mee dat voor $0 \leq a < b < c$ geldt dat $\int_a^c g(x)\delta(x - b)dx = g(b)$, met $g(x)$ een willekeurige continue functie.

a) *(3 pt)* Verklaar dat de bijbehorende diffusievergelijking die de temperatuur binnenin de staaf beschrijft de volgende vorm aanneemt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

en vind de eigenwaarden, eigenfuncties en de juiste uitdrukking voor $u(x, t)$.

b) *(1 pt)* Als de staaf van koper is gemaakt (thermische diffusie $k = 1.15$ cm^2/s), welke temperatuur heeft de staaf dan op $x = 20$ cm na 3 minuten? Bereken de eerste 2 niet-nul termen.

c) *(1 pt)* Als de staaf van beton is gemaakt (thermische diffusie $k = 0.005$ cm^2/s), hoe lang zal het duren vooraleer de staaf een temperatuur van $15°C$ op $x = 20$cm heeft bereikt? Gebruik de eerste term van de serie om t te vinden.

Uitwerking:

a) 1: De diffusievergelijking

2: De uiteinden van de staaf worden in ijs gelegd

3: De temperatuur op tijd gelijk aan nul wordt gegeven door de functie $f(x)$

Begin met het splitsen van variabelen

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Dit geeft

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda.$$

Eerst lossen we op voor $X(x)$.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

1. Voor $\lambda = 0$:

$$X(x) = Ax + B \rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 & \Longrightarrow \; B = 0 \\ X(L) = 0 & \Longrightarrow \; A = 0 \end{cases}$$

Triviale oplossing $X(x) = 0$.

2. Voor $\lambda < 0, \lambda = -\alpha^2$:

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 & \Longrightarrow \; A = -B \\ X(L) = 0 & \Longrightarrow \; A = 0 \end{cases}$$

Triviale oplossing $X(x) = 0$.

3. Voor $\lambda > 0, \lambda = \alpha^2$:

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) \rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 & \Longrightarrow \; A = 0 \\ X(L) = 0 & \Longrightarrow \; B = 0 \text{ of } \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

Oplossing $X(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, met eigenwaarden $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ en eigenfuncties $\{\sin(\frac{n\pi}{L}x)\}, n \in \mathbb{N}_0$.

Voor $T(t)$ lossen we volgend stelsel op:

$$T'(t) + k\frac{n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

Dit geeft

$$T_n(t) = C_n \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right), n \in \mathbb{N}_0, C_n \in \mathbb{R}.$$

We vinden

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

Als laatste moeten we een uitdrukking voor D_n vinden. Dit doen we door gebruik te maken van de beginvoorwaarde.

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Dan is

$$D(n) = \frac{\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx}{\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi}{L}x)dx}$$

De deler is dan

$$\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi}{L}x)dx = \frac{L}{2}(1+\sin(n\pi)) = \frac{L}{2}$$

en de noemer

$$\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = T\int_0^L \delta(x-L/2)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = T\sin(\frac{n\pi}{L}L/2) = T\sin(\frac{n\pi}{2})$$

Dus

$$u(x,t) = \frac{2T}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{2})\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

Voor L = 60cm, T = 1200:

$$u(x,t) = 40\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{2})\sin\left(\frac{n\pi}{60}x\right)\exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{60^2}t\right)$$

b) Merk op dat

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases}(-1)^k \text{ als } n = 2k+1\\ 0 \text{ als } n = 2k\end{cases}$$

Dus

$$\begin{aligned} u(20,180) &= 40\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{2})\sin\left(\frac{n\pi}{60}x\right)\exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{60^2}t\right)\\ &= 40\left(\sin(\pi/3)\exp\left(-1.15\frac{\pi^2}{60^2}180\right) + \sin(5\pi/3)\exp\left(-1.15\frac{25\pi^2}{60^2}180\right)\right)\\ &\simeq 19.693 - 0.0000238788 \simeq 19.69^\circ C \end{aligned}$$

c) De verdeling $u(x,t)$ is gegeven door

$$\begin{aligned} 15 &= 20\exp(-0.005\frac{\pi^2}{60^2}t)\\ t &= -\frac{60^2}{0.005\pi^2}\ln(\frac{15}{20}) \simeq 20986s \simeq 5\text{h } 49\text{min } 46\text{s} \end{aligned}$$