# 1 Examen Differentiaalvergelijkingen (24 januari 2012)

## 1.1 Theorie Van Assche

1. Een 1e orde lineaire differentiaalvergelijking heeft volgende oplossingen:

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (a) Bereken de Wronskiaan van deze oplossingen.
   (b) Op welke intervallen zijn deze oplossingen lineair onafhankelijk.
   (c) Wat leert de Wronskiaan je over de coëfficiënten van de vergelijking?
   (d) Bereken de coëfficiënten van de vergelijking expliciet.

2. Er werd een stelsel gegeven dat een systeem van vering bij een auto beschrijft. Na wat rekenen kwam je dan tot volgende vergelijking:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (a) Los op.
   (b) Je rijdt over een kasseienweg en er komt een externe kracht op de vering:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cos \omega t \tag{3}$$

   Voor welke waarden van $\omega$ is er resonantie?

## 1.2 Theorie Fannes

1. Zij $f$ een sfeersymmetrische functie van de 3D-ruimte, dus $f(\mathbf{x}) = f(||\mathbf{x}||)$. De Fouriertransformatie in 3D wordt gegeven door

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int \int \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4}$$

   (a) Toon aan dat $\hat{f}$ ook sfeersymmetrisch is. Hint: gebruik bolcoördinaten en stel $\phi = 0$ op de $\mathbf{k}$-as.
   (b) Toon aan dat de Fouriertransformatie voor symmetrische functies vertaalt in

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \sin(kr) r \mathrm{d}r \tag{5}$$

   *Noot: zo stond het op het examen, maar als je het narekent zul je zien dat er een factor $2\pi$ bij in de sinus moet.*

2. Los de warmtevergelijking op op het interval $[0, 1]$, met begintemperatuur 0, $u(1, t) = 0$ en $u(0, t)$ neemt exponentieel af. Hint: bereken eerst een particuliere oplossing door scheiding van veranderlijken.

## 1.3 Oefeningen

1. Vind mbv machtreeksen 2 lineair onafhankelijke oplissingen van de vergelijking $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

2. We lossen de golfvergelijking op op een halfrechte mbv de Laplacetransformatie.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x, t \in \mathbb{R}^+ \tag{6}$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = f(t), \qquad \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0 \tag{7}$$

   (a) Zij $U(x,s)$ de Laplacegetransformeerde van $u$ naar $t$. Toon aan dat $\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} = c^2 s^2 U$. *Noot: zo stond het ook weer op het examen, maar het lijkt mij dat de* $c^2$ *in het linkerlid moet staan, aangezien* $s$ *in Hz uit te drukken is.*

   (b) Los deze differentiaalvergelijking op voor $U$ en druk $U$ uit in functie van $F$, de Laplace van $f$.

   (c) Bepaal $u$ door de inverse Laplace te nemen.