

Discrete Symmetrieën, 28 januari 2014, namiddag

Vraag 1

1. Stel dat R_1 en R_2 twee representaties zijn van een eindige groep $\mathcal{G}$ op eindigdimensionale vectorruimten $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$. Toon aan dat

$$R_1 \otimes R_2 : g \mapsto R_1(g) \otimes R_2(g)$$

een representatie is van $\mathcal{G}$ op $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$.

2. Bereken het karakter van $R_1 \otimes R_2$ in termen van de karakters van R_1 en R_2 .
3. Stel dat R de irreducibele representatie van dimensie twee is van S_3 . Bepaal voor $n = 2, 3, \dots$ de multipliciteiten van de irreducibele representaties van S_3 in $\underbrace{R \otimes \dots \otimes R}_{n \text{ factoren}}$.

Vraag 2

De delenverzameling $\mathcal{D}(\Omega)$ van een verzameling Ω is de verzameling van alle deelverzamelingen van Ω , bijvoorbeeld voor $\Omega = \{a, b, c\}$ vinden we

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

We rusten $\mathcal{D}(\Omega)$ uit met het symmetrische verschil Δ :

$$\Delta : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega) : (X, Y) \mapsto X \Delta Y$$

waar

$$\begin{aligned} X \Delta Y &= (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \\ &= \{x \in \Omega \mid x \text{ behoort tot } X \text{ of tot } Y \text{ maar niet tot beide}\}. \end{aligned}$$

Onderstel verder dat Ω eindig is.

1. Toon aan dat $\mathcal{G} = (\mathcal{D}(\Omega), \Delta)$ een commutatieve groep is.

Voor elke deelverzameling A van Ω definiëren we de afbeelding

$$\chi_A : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} : X \mapsto (-1)^{\#(A \cap X)}$$

2. Toon aan dat χ_A het karakter is van een irrep van $\mathcal{G}$.
3. Stel de karaktertabel op van $\mathcal{G}$.