Klassieke Mechanica

Prof. H. De Gersem
E. Temmerman
P. Van Nuffel

28 januari 2013, 13u

Naam:

Richting:

vraag 1 (/3)	vraag 2 (/4)	vraag 3 (/4)	vraag 4 (/4)	vraag 5 (/5)	totaal (/20)

Verloop van het examen

- Het volledige examen duurt 4 uur of eventueel langer tot de laatste kandidaat per groep klaar is met het mondelinge gedeelte. Uiteraard bestaat de mogelijkheid om vroeger in te dienen.
- Bij alle vragen wordt een volledige schriftelijke uitwerking gevraagd. Theorievragen 1, 2 en 3 kunnen verder worden toegelicht bij prof. De Gersem (A344). Oefeningen 4 en 5 kunnen worden toegelicht bij Pieter Van Nuffel (A336).

Opmerkingen bij het examen

- Zorg dat alle vragen op afzonderlijke bladen beantwoord worden. Nummer alle bladen en schrijf je naam of initialen op elk blad. Noteer ook je naam en richting bovenaan dit blad in de voorziene ruimte.
- Lees alle opgaven aandachtig en zorg dat je alle delen van de vraag beantwoordt.
- Schrijf groot en duidelijk. Maak grote en duidelijke figuren.

Veel succes!

Vraag 1 **(3 punten, schriftelijk met mondelinge toelichting)**

Het principe van d'Alembert stelt dat indien alle verbindingskrachten ideaal zijn,

$$\sum_i \left(\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{1}$$

waarbij $\delta\vec{r}_i$ virtuele verplaatsingen, $\vec{K}_i$ gegeven krachten en $\vec{p}_i$ impulsen zijn.

Gevraagd:

(a) Wanneer is een verbindingskracht ideaal? Geef een voorbeeld.

(b) Leid het principe van d'Alembert af uit de tweede wet van Newton.

(c) Wat zijn de gelijkenissen en verschillen tussen het principe van d'Alembert en de vergelijkingen van Lagrange?

Vraag 2 **(4 punten, schriftelijk met mondelinge toelichting)**

Beschouw een voorwerp met een cilindervormige symmetrie (de geometrie is invariant voor een rotatie rond een bepaalde symmetrie-as). Dit voorwerp ondergaat een vrije precessiebeweging.

(a) Welke krachten werken in op het voorwerp?

(b) Stel de Lagrangevergelijkingen op in functie van de Eulerhoeken.

(c) Welke behoudswetten zijn van toepassing?

(d) Leid verbanden af tussen het impulsmoment, de hoek en de hoeksnelheid van de precessiebeweging.

Vraag 3 **(4 punten, schriftelijk met mondelinge toelichting)**

Beschouw twee deeltjes met massa m_1 en massa m_2, waarop enkel interne centrale krachten werken. Neem aan dat de onderlinge interactie afleidbaar is van een potentiaal van de vorm $V(r) = \frac{k}{r}$ (met k een constante). Dit systeem is te herleiden tot de beweging van één deeltje met massa μ en plaatsvector $\vec{r}$ gelijk aan de vector van het ene naar het andere deeltje. De Lagrangiaan van dit systeem in sferische coördinaten wordt gegeven door:

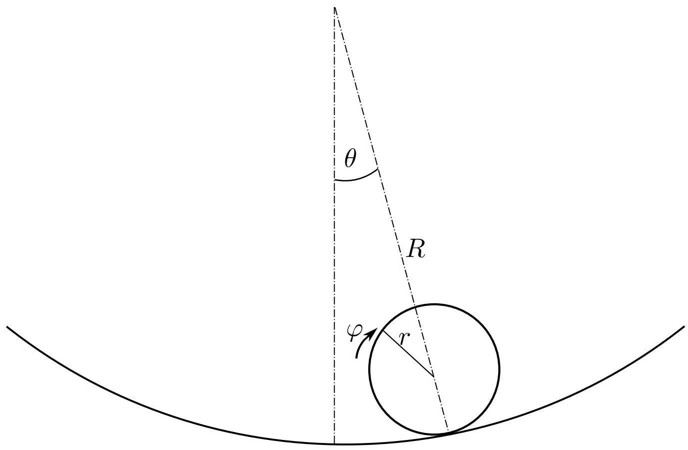
$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

(a) Toon aan dat het impulsmoment behouden blijft.

(b) Toon aan dat de centrale krachten aanleiding geven tot een vlakke of rechtlijnige beweging.

(c) Bepaal de Lagrangevergelijking in r en toon vandaaruit aan dat de baan kan geschreven worden als een kegelsnede met oorsprong in één van de brandpunten.

(d) Maak gebruik van bovenstaande afleidingen om de tweede wet van Kepler te bewijzen.



Figuur 1: Rollende cilinder

Vraag 4 **(4 punten, schriftelijk met mondelinge toelichting)**
Een massieve, homogene cilinder met straal r en massa M rolt, zonder slippen en zonder wrijving, binnen een grotere vaste cilinder met straal $R > r$ in het veld van de zwaartekracht.

(a) Stel de Lagrangiaan op in functie van de veralgemeende coördinaat θ.

(b) Leid de bewegingsvergelijking af.

(c) Veronderstel kleine uitwijkingen en stel $R = 2r = 13.2m$. Bereken dan de periode van de beweging.

Vraag 5 **(5 punten, schriftelijk met mondelinge toelichting)**
Een trebuchet bestaat uit een stang die kan roteren rondom een vaste as door het punt O. De stang is aan het ene uiteinde verbonden met een slinger en aan het andere uiteinde met een tegengewicht met massa m. Aan het uiteinde van de slinger is een massa $2m$ bevestigd. Veronderstel dat de stang en de slinger massaloos zijn, dat de beweging in het vlak van de tekening plaatsvindt en dat de lengte l van de slinger en van de halve slingerarm gelijk zijn.

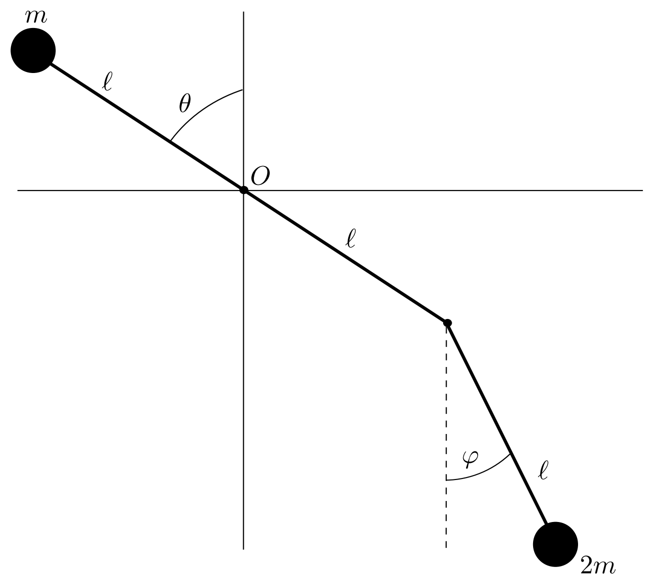
(a) Stel de uitdrukking voor de Lagrangiaan op.

(b) Bepaal de evenwichtsstanden van het systeem en geef aan welke stabiel zijn.

(c) Toon aan dat, voor kleine uitwijkingen rond de stabiele evenwichtsstand, de Lagrangiaan te schrijven is als:

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}(3\dot{\theta}^2 + 2\dot{\phi}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\phi}) - mgl(\frac{\theta^2}{2} + \phi^2).$$

(d) Bereken de eigenfrequenties van de kleine trillingen rond de evenwichtspositie.



Figuur 2: Slinger met contragewicht.