Examen Klassieke Mechanica

Eef Temmerman, Herbert De Gersem

3 februari 2012, 8u30, academiejaar 11-12
N2

NAAM:

RICHTING:

vraag 1 (/4)	vraag 2 (/4)	vraag 3 (/4)	vraag 4 (/3)	vraag 5 (/5)	TOTAAL (/20)

Verloop van het examen

- Het volledige examen duurt 3,5 uur of eventueel langer tot de laatste kandidaat klaar is met het mondelinge gedeelte. Uiteraard bestaat de mogelijkheid om vroeger in te dienen.
- Vraag 4 (eerste opgave van het deel oefeningen) is schriftelijk. Alle andere vragen zijn schriftelijk met mondelinge toelichting. Voor deze vragen wordt ook een volledige schriftelijke uitwerking gevraagd.

Opmerkingen bij het examen

- Zorg dat alle vragen op afzonderlijke bladen beantwoord worden. Nummer alle bladen en schrijf je naam of initialen op elk blad. Noteer ook je naam en richting bovenaan dit blad in de voorziene ruimte.
- Lees alle opgaven aandachtig en zorg dat je alle delen van de vraag beantwoordt.
- Schrijf groot en duidelijk. Maak grote en duidelijke figuren.

Veel succes!

Theorie

Vraag 1 (schriftelijk met mondelinge toelichting, 4 punten)

Beschouw een mechanisch systeem met k holonome verbindingen dat kan beschreven worden als functie van veralgemeende coördinaten $q_j (j = 3n - k)$.

(a) Onder welke voorwaarden is de virtuele arbeid van de gegeven krachten (uitwendige minus verbindingskrachten) nul? Geef een voorbeeld.

(b) Formuleer het principe van d'Alembert.

(c) Toon aan hoe je hieruit de vergelijkingen van Lagrange kan afleiden. Er is gegeven dat je via het invoeren van de kinetische energie T kan schrijven:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad .$$

Vraag 2 (schriftelijk met mondelinge toelichting, 4 punten)

Beschouw de beweging van een star lichaam met een vast punt.

(a) Bepaal een uitdrukking voor het impulsmoment als functie van de hoeksnelheid.

(b) Wat zijn hoofdtraagheidsassen?

(c) Hoe ziet de uitdrukking van vraag (a) eruit indien het relatieve assenstelsel volgens de hoofdtraagheidsassen gekozen is?

(d) Leid de bewegingsvergelijkingen van Euler af.

Vraag 3 (schriftelijk met mondelinge toelichting, 4 punten)

Beschouw twee deeltjes met massa m_1 en massa m_2, waarop enkel interne centrale krachten werken. Neem aan dat de onderlinge interactie afleidbaar is van een potentiaal van de vorm $V(r) = -\frac{k}{r}$ (met k een constante).
Dit systeem is te herleiden tot de beweging van één deeltje met massa μ en plaatsvector $\vec{r}$ gelijk aan de vector van het ene naar het andere deeltje. De Lagrangiaan van dit systeem in sferische coördinaten wordt gegeven door:

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

(a) Toon aan dat het impulsmoment behouden blijft.

(b) Toon aan dat de centrale krachten aanleiding geven tot een vlakke of rechtlijnige beweging.

(c) Bepaal de Lagrangevergelijking in r en toon vandaaruit aan dat de baan kan geschreven worden als een kegelsnede met oorsprong in één van de brandpunten.

(d) Maak gebruik van bovenstaande afleidingen om de tweede wet van Kepler te bewijzen.

Oefeningen

Vraag 4 (schriftelijk, 3 punten)

Een bolletje met massa m is onderworpen aan de zwaartekracht (z-as omhoog gericht) en glijdt langs een gladde draad die de vorm heeft van een conische spiraal met vergelijking (in cilindercoördinaten):

$$\begin{cases} \rho &= az \\ \theta &= -bz \end{cases} \qquad (a, b = \text{constanten})$$

(a) Stel de Lagrangiaan op in geschikte veralgemeende coördinaten.

(b) Bepaal de differentiaalvergelijking waaraan z moet voldoen.

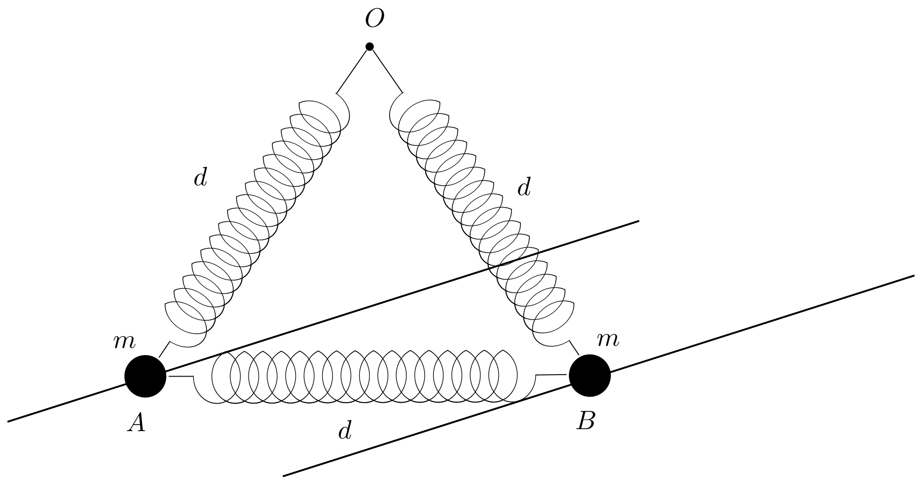
Vraag 5 (schriftelijk met mondelinge toelichting, 5 punten)

Twee deeltjes met gelijke massa m kunnen zich zonder wrijving verplaatsen langs twee evenwijdige, horizontale rechten die op een afstand d van elkaar gelegen zijn. De deeltjes zijn onderling verbonden met een veer en zijn bovendien elk met een veer verbonden met een vast punt O op een afstand d van beide rechten. De drie massaloze veren hebben dezelfde veerconstante k en gelijke rustlengte ℓ, waarbij $\ell < d$. Noem A en B de snijpunten van de rechten met het loodvlak door O. In Figuur 1 is het systeem gegeven in zijn evenwichtsstand.

(a) Toon aan dat de stand waarbij de deeltjes zich in A en B bevinden een stabiele evenwichtsstand is.

(b) Bepaal de frequenties van kleine trillingen rond dit evenwicht.

(c) Beschrijf de beweging van het systeem indien het ene deeltje vanuit stilstand vertrekt in A, terwijl het andere deeltje vanuit stilstand vertrekt vanuit een positie met uitwijking ϵ ten opzichte van B.



Figuur 1: De twee massa's m trillen langs de horizontale rechten rond de getoonde evenwichtsstand.