EXAMEN ALGEBRA II:
maandag 15 januari 2007

Naam: ....

Voornaam: ....

Richting: ....

---

1. (3 punten) Op pagina 18 lijn -7 van de cursustekst over Galoistheorie staat het volgende: "... thus there is a well-defined isomorphism $\varphi : K_1(\alpha) \to K_2(\beta)$ which ...". Leg in detail uit waarom φ surjectief is.

2. (4 punten) Stel $\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Toon aan dat $\mathbb{Q}(\gamma)$ een Galois-uitbreiding is van $\mathbb{Q}$ met cyclische Galois-groep. Geef uitleg bij je berekeningen. Gebruik dit resultaat om aan te tonen dat ook $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ een Galois-uitbreiding is van $\mathbb{Q}$.

3. (3 punten) Zij L een eindige en normale velduitbreiding van het veld K. Zij M een veld dat voldoet aan $K \subseteq M \subseteq L$. Zij $\tau : M \to L$ een $K-$monomorfisme (= een *injectief* homomorfisme dat K vast laat). Toon aan dat er een $K-$automorfisme σ van L bestaat, zodanig dat $\sigma(m) = \tau(m)$ voor elke $m \in M$ (of dus $\sigma|_M = \tau$).

4. (8 punten) Zij k een veld. Zij $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ een ideaal in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Dan kunnen we voor een willekeurige $f(t) \in k[t]$ het ideaal $f(t)I$ in $k[x_1, \ldots, x_n, t]$ bekijken dat voortgebracht wordt door $f(t)f_1, \ldots, f(t)f_m$.

   (*Opgelet:* dit is nu een ideaal in $k[x_1, \ldots, x_n, t]$, dus een willekeurig element hieruit is een combinatie van de voortbrengers met coëfficiënten in deze ring!)

   (a) Zij I en J idealen in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Toon aan dat
   $$I \cap J = (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \ldots, x_n].$$

   (b) Geef een methode om een Gröbner-basis te vinden van het ideaal $I \cap J$ als er voortbrengers van I en J gegeven zijn. Maak gebruik van (a).

   (c) Pas deze methode toe om de volgende doorsnede van idealen in $k[x, y]$ te bepalen:
   $$(xy, y^2) \cap (x).$$

   (d) Ontwerp een algoritme om het KGV en de GGD van twee veeltermen $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ te bepalen, zonder die eerst in irreducibele factoren te ontbinden. Maak gebruik van (c), en het feit dat $k[x_1, \ldots, x_n]$ een UFD is. Je mag gebruik maken van de klassieke formule die het verband tussen KGV en GGD geeft.