

Mathematical Introduction to Fluid Dynamics

03/09/2020

Exercises

The exercise exam counts for 10/20 marks. The scores of the two best exercises are averaged to form the final score for this part of the exam.

1. A fermentation lock (also called an air lock) is an S-shaped device filled with water (see Fig. 1) that is used to seal fermenting bottles of fruit juice. It allows the carbon dioxide to escape while blocking oxygen from entering the vessel. As seen on the schematic, the pressure inside the vessel pushes the CO_2 as bubbles through the water. After the release of such a bubble, the water in the air lock is oscillating.
In this exercise, you will model the air lock as a straight, vertical, semi-open cylinder with cross-section A . Initially there is pressure equilibrium across the water with mass M , that exerts a force on the CO_2 by the gravity. When the water overshoots the equilibrium position downwards, there is an increased restoring force in the CO_2 acting as a restoring force, while the other overshoot has the gravity as restoring force.
 - (a) Write down the equation of motion and linearise it around the equilibrium position. Use adiabatic expansion to describe the thermodynamics of the CO_2 : $p = C\rho^\gamma$.
 - (b) Relate the density perturbation to the height of the water mass.
 - (c) Find the natural frequency of this gravito-acoustic oscillation.
2. In the kids' section of a swimming pool, there is a fountain in the shape of half a sphere. The water emerges with a constant flow rate Q at the very top of the half sphere and streams down the sphere to join the water of the pool. Assuming that the water supply at the top is constant and spreads evenly over the half sphere, what is the function of the thickness of the layer of water as a function of height? In this exercise, we do not take into account viscosity and assume that the layer of water has a uniform speed across its cross-section.
3. In the course, we have only considered the traffic on a one-lane road. Consider now a motorway with multiple lanes, and assume that the traffic splits evenly over all lanes. In this exercise, we will compute the traffic flow around a sudden transition from a two-lane motorway to a three-lane motorway. Assume that there is initially a density per lane of $\rho_0 < \rho_{\max}/2$ everywhere. As usual, you can assume that the linear density-velocity relationship holds for the density of each lane. How does the flow evolve in time?

Theory

The theory exam counts for 10/20 marks. Each questions contributes proportionally to the final score. Give short answers (say half page max) to the short questions.

1. Apply the Eulerian and Lagrangian description to understand how the local amount of falling rain is varied under clouds that are moved by a constant wind.
2. Make a sketch of the typical surface force to act on a Newtonian fluid parcel in a uniform flow.

3. Write down with a formula what the expression $\rho \vec{v} \vec{v}$ in the Eulerian momentum equation means, to show that you understand what its mathematical concept is.
4. Explain why only the Laplacian is approximated by δ^{-2} in the derivation of the thickness of the boundary layer in viscous fluids, and why not in the inertial term.
5. Write down extra equations (on top of what is there in the course) to show that you understand the Neumann stability analysis of the Lax-Friedrichs numerical scheme. In particular, derive the mentioned value of λ and show that Lax-Friedrichs is stable if (and only if) the CFL condition is fulfilled.



Figuur 1: A picture (left) and schematic (right) of a fermentation or air lock. Source: <https://www.howtohomebrewbeers.com/> and <https://www.stonehelm.co.uk/>

Oefeningen

Het oefeningenexamen telt mee voor 10/20 punten. Daarvoor wordt de score van de twee beste oefeningen opgeteld om tot de eindscore te komen.

1. Een waterslot is een S-vormig voorwerp gevuld met water (Fig. 1) dat gebruikt wordt om gistflessen met fruitsap af te sluiten van de buitenlucht. Het laat de koolstofdioxide ontsnappen, maar laat geen nieuwe zuurstof toe in de fles. Zoals je op de figuur kan zien duwt de druk in de fles de CO_2 naar buiten doorheen het water. Nadat zo'n bubbel ontsnapt oscilleert het water in het slot.
In deze oefening modelleer je het waterslot als een rechte, verticale, halfopen cylinder met doorsnede A . Initieel is er drukevenwicht overheen het water met massa M , dat een neerwaartse kracht uitoefent op de CO_2 ten gevolge van de zwaartekracht. Wanneer het water de evenwichtspositie voorbij schiet naar beneden, dan is er een toegenomen drukkracht in de CO_2 , terwijl de andere afwijking zwaartekracht als terugkeerkracht heeft.
 - (a) Schrijf de bewegingsvergelijking en lineariseer ze rond het evenwicht. Gebruik adiabatische expansie om de thermodynamische evolutie van de CO_2 te beschrijven:
$$p = C\rho^\gamma.$$
 - (b) Relateer de dichtheidsperturbaties aan de hoogte van de watermassa.
 - (c) Vind de natuurlijke frequentie van de gravito-akoustische golven.
2. In het kindergedeelte van het zwembad staat er een fontein in de vorm van een halve bal. Het water komt uit de bovenkant met een vast debiet Q en stroomt langs de kanten naar beneden om in terug in het zwembad te gaan. Wanneer je aanneemt dat het een vast debiet is dat gelijkmatig wordt verspreid over het oppervlak van de halve bol, wat is dan de functie van de dikte van het water als functie van de hoogte? In deze oefening nemen we geen viscositeit in rekening en zeggen we dat het water een constante snelheid heeft in de doorsnede van de laag.
3. In de cursus gebruikten we steeds een straat met een enkel baanvak. Beschouw nu een snelweg met meerdere baanvakken. In deze oefening berekenen we de evolutie van het verkeer bij een plotse overgang van twee baanvakken naar drie baanvakken. Neem aan dat er initieel overal een dichtheid $\rho_0 < \rho_{\max}/2$ op elke rijstrook is. Neem zoals gewoonlijk aan dat de lineaire snelheids-dichtheidsrelatie geldig is in elke rijstrook. Hoe evolueert de stroming in de tijd?

Theorie

Het theorie-examen telt mee voor 10/20 punten. Elke vraag draagt evenredig bij aan de eindscore. Geef korte antwoorden (max. een halve bladzijde) op de korte vragen.

1. Pas de Euleriaanse en Lagrangiaanse beschrijving toe om te begrijpen hoe de lokale regenval varieert onder wolken bij een constante wind.
2. Schets de typische oppervlaktekracht die inwerkt op een Newtoniaans vloeistofelement in een uniform stroming.
3. Schrijf met een formule wat de uitdrukking $\rho \vec{v} \vec{v}$ in de Euleriaanse momentumvergelijking betekent, om aan te tonen wat haar wiskundig concept is.

4. Leg uit waarom enkel de Laplaciaan wordt benaderd door δ^{-2} in de afleiding van de dikte van de randlaag in een visceuze vloeistof, en waarom niet de inertie-term.
5. Schrijf extra vergelijkingen (bovenop wat in de cursus staat) om aan te tonen dat je begrijpt hoe de von Neumann stabiliteitsanalyse werkt van het Lax-Friedrichs numerieke schema. Leid specifiek de vermelde waarde van λ af en toon dat Lax-Friedrichs stabiel is als (en slechts als) de CFL conditie voldaan is.