

Naam _____

25/06/2022

Richtlijnen:

- Vul je naam en voornaam in.
- Gebruik de omkaderde ruimte onder elke vraag om te antwoorden.
Gebruik de achterkant als kladpapier.
Zonder expliciete verwijzing worden kladbladen niet verbeterd of geëvalueerd.

Veel succes!

Vraag 1 – 3/20

Bestaan er kernen, die via β^- én EC-verval, maar niet door β^+ , vanuit hun grondtoestand kunnen vervallen? Welke? Leg uit.

Een kern kan via β^- én EC vervallen als de massa groter is van die van beide isobaren die naast de kern liggen. Dat gebeurt alleen voor oneven-oneven kernen op het minimum van de hun massa-parabool, wanneer de naaste even-even isobaren een lagere massa hebben. Zie b.v. Fig. 3.18 in het boek van Krane.

EC-verval zonder β^+ is mogelijk wanneer het verschil in massa tussen moeder- en dochteratoom positief is, maar kleiner dan $2m_e c^2$, twee keer de massa van het elektron.

Vraag 2 – 3.5/20

Stel dat de sterktes van de $S = 0$ en $S = 1$ componenten van de nucleon-nucleon kracht werden omgewisseld: een sterkere $S = 0$ kracht (met de waarde van de reële $S = 1$ component) en een zwakkere $S = 1$ kracht (met de waarde van de reële $S = 0$ component).

In dat geval:

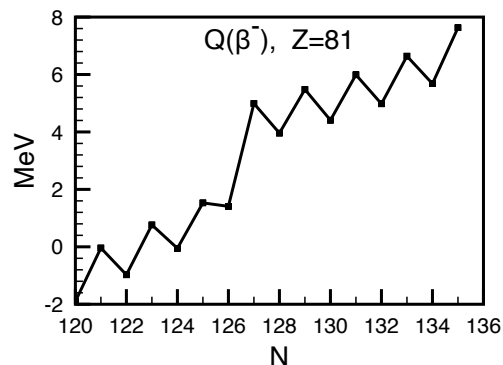
- Wat kan je zeggen over het bestaan van de $A = 2$ isobaren? Geef voor elke toestand de vermoedelijke spin en pariteit.
- Bereken de werkzame doorsnede voor de lage-energie proton-neutron elastische verstrooiing.

- a) De situatie voor het deutron zou omgekeerd t.o.v. de realiteit zijn: de $S = 0$ component van de kracht zou de 0^+ toestand binden, terwijl de 1^+ toestand zou niet gebonden zijn. Het di-neutron en het di-proton kunnen ook in een $S = 0$ toestand, met spin-pariteit 0^+ (niet in een $S = 1$ toestand wegens Pauli). Het di-neutron zou gebonden zijn, met dezelfde bindingsenergie ($E \approx 2.2$ MeV) als het 0^+ deutron. In het di-proton zou de Coulomb afstoting ook aanwezig zijn: de waarde van de Coulomb energie op een afstand $R \approx 2$ fm is $V_C \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2}{R} \approx 0,7$ MeV, kleiner dan de energie van de sterke kracht; het di-proton zou dus ook verbonden zijn.
- b) De totale neutron-proton werkzame doorsnede is de som van de $S = 0$ (singlet) en $S = 1$ (triplet) bijdragen, elke met hun statistische factor voor de spin: $\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{4}\sigma_s + \frac{3}{4}\sigma_t$. De waarden van σ_s en σ_t zouden omgewisseld zijn, dus $\sigma_s = 4,6$ b en $\sigma_t = 67,8$ b. Dat resulteert in $\sigma_{\text{tot}} = 52,0$ b.

Vraag 3 – 3.5/20

De figuur toont de Q -waarde voor het β^- verval van Tl isotopen ($Z = 81$) als functie van het aantal neutronen N . Verklaar:

- de algemene toename met N ;
- het even-oneven patroon;
- de sprong bij $N = 126-127$.



Het verloop van de Q -waarde voor het β^- verval volgt het verschil tussen de massa's van de Tl isotopen en de dochterkernen, Pb isotopen. We kunnen de semi-empirische massaformule gebruiken om dat verloop te verklaren, door het verschil te bestuderen tussen $M(A, Z)$ en $M(A, Z + 1)$.

- Wegens de *symmetrie term*, neemt de massa van kernen toe kwadratisch toe, als $(N - Z)^2$, langs een reeks van isotopen; het verschil tussen $M(A, Z)$ en $M(A, Z + 1)$ neemt dus *lineair* toe met $(N - Z)$.
- Het even-oneven effect (*paringsenergie*) bepaalt het zigzag patroon. Voor oneven Tl kernen (even N) is de paringsenergie term nul voor beide moeder- en dochterkern. Voor even Tl kernen (oneven N , oneven Z) geeft de paringsenergie een positieve bijdrage aan de massa, terwijl de bijdrage voor de Pb dochter (even-even kern) is negatief (meer gebonden). De Q -waarde voor oneven N is dus systematisch hoger dan voor even N .
- De sprong bij $N = 126-127$ kan niet worden verklaard met het reguliere verloop van de semi-empirische massaformule. Bij $N = 127$ vervalt ^{208}Tl naar de dubbel-magisch ^{208}Pb kern, die meer verbonden is door het sluiten van beide de neutronen- en protonenschil. De hogere Q -waarde is dus een schilleneffect.

Oefening 1 – 4.5/20

De kern ^{176}Tl ($Z = 81$) ligt voorbij de proton druppellijn: de proton scheidingsenergie is negatief, $S_p = -1,265 \text{ MeV}$, en het verval gebeurt 100% door proton emissie naar ^{175}Hg . Toch heeft ^{176}Tl een relatieve lange halfwaarde tijd: $t_{1/2} \approx 5,2 \text{ ms}$.

- Leg uit, waarom de kern ^{176}Tl zo'n lange halfwaarde tijd heeft.
- Gebruik een model om de halfwaardetijd te schatten.
- Waar ligt de grootste onzekerheid bij jouw schatting?

[Gebruik $R = 1,2 A^{1/3} \text{ fm}$ voor de kernstraal.]

- a) Het proton valt niet onmiddellijk uit de ^{176}Tl kern, omdat er een barrière ontstaat in de potentiaal door de combinatie van de Coulomb en de sterke kracht, zoals b.v. bij alfaverval. Om uit te vallen, moet het proton door de barrière tunnelen.

- b) We gebruiken het Gamow-model, met de massa en lading van het proton ($A = 1$, $Z = 1$) i.p.v. die van een alfa deeltje.

De Q -waarde van het verval is net de scheidingsenergie van het proton, maar positief: $Q = +1,265 \text{ MeV}$.

De straal van het systeem kunnen we schatten als:

$$a = 1,2 \times (175^{1/3} + 1^{1/3}) \text{ fm} = 7,91 \text{ fm} \quad (\text{ook aanvaardbaar: } a = 1,2 \times 175^{1/3} \text{ fm})$$

De hoogte van de barrière in a is:

$$B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ'}{a} = 1,44 \text{ MeV fm} \times \frac{1 \times 80}{7,91 \text{ fm}} = 14,6 \text{ MeV} \Rightarrow Q/B = x = 0,0869$$

De Gamow factor is dan:

$$G = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{\frac{2m_p c^2}{Q}} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} zZ' \left[\arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} \right] =$$

$$= \frac{1}{197,3 \text{ MeV fm}} \sqrt{\frac{2 \times 1,0074 \text{ u} \times 931,5 \text{ MeV u}^{-1}}{1,265 \text{ MeV}}} \times 1,44 \text{ MeV fm} \times 1 \times 80 \times 0,990 = 22,26$$

De factor f is:

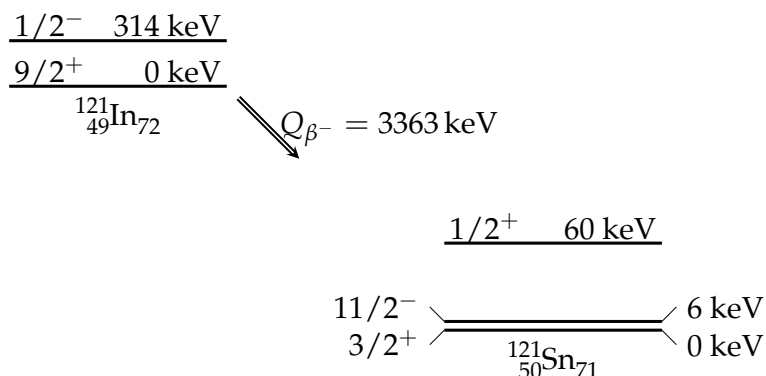
$$f = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{2(V_0 + Q)}{m_p c^2}} = \frac{3 \times 10^{23} \text{ fm s}^{-1}}{7,91 \text{ fm}} \sqrt{\frac{2(35 + 1,265) \text{ MeV}}{1,0074 \text{ u} \times 931,5 \text{ MeV u}^{-1}}} = 1,05 \times 10^{22} \text{ s}^{-1}$$

De vervalconstante en de halfwaardetijd zijn dus:

$$\lambda = f e^{-2G} = 4,9 \times 10^2 \text{ s}^{-1} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 1,4 \text{ ms}$$

- c) In dit model is de halfwaarde tijd zeer gevoelig aan de Gamow factor G (de tunnelingswaarschijnlijkheid) en niet zo veel aan f . Onze grootste benadering is de schatting van de straal a van het systeem. Een wijziging van slechts 0,5 fm leidt tot een factor 2 verschil in de halfwaarde tijd.

Oefening 2 – 5.5/20



De figuur geeft de lage-energie toestanden in ^{121}In en ^{121}Sn weer (energieën zijn niet op schaal).

a) Verklaar, op basis van een model, de spins van de twee toestanden in ^{121}In .

Beschouw nu de $1/2^-$ aangeslagen toestand in ^{121}In . Gebruik de informatie in de toegevoegde figuren en tabel, en:

b) schat de partiële halfwaarde tijd voor electromagnetisch verval;

c) verwacht je die schatting nauwkeurig te zijn? Leg uit.

d) Schat de partiële halfwaarde tijd voor β^- verval.

Beschouw alleen de toestanden in ^{121}Sn , die in de figuur worden weergegeven.

e) Zal de totale halfwaarde tijd van de $1/2^-$ toestand langer of korter zijn in vergelijking tot de twee waarden berekend in b) en d)?

a) De ^{121}In kern heeft een even aantal neutronen en 49 protonen, één minder dan de $Z = 50$ gesloten schil. We kunnen verwachten dat de lage-energie toestanden door gaten in de orbitalen net onder $Z = 50$ worden bepaald.

Die orbitalen zijn de $1g_{9/2}$ en, net onder, de $2p_{1/2}$; een gat in het eerste geeft een $9/2^+$ toestand (g betekent $\ell = 4$, even pariteit), een gat in het tweede (een proton springt naar de $1g_{9/2}$) geeft een $1/2^-$ toestand (p betekent $\ell = 1$, oneven pariteit).

b) We gebruiken de Weisskopf afschatting.

De overgang heeft $\Delta I = L = 4$ of 5 , de pariteit verandert, dus $M4$ of $E5$; we beschouwen alleen de $M4$ overgang:

$$\lambda_{\gamma}(M4, A = 121, E = 314 \text{ keV}) = 1,96 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Interne conversie is niet verwaarloosbaar: uit Figuur 1 schatten we een conversiecoëfficiënt $\alpha \approx 1,7$. De totale vervalconstante voor electromagnetische overgangen is:

$$\lambda_{\text{tot}} = \lambda_{\gamma}(1 + \alpha) = 5,28 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1} \Rightarrow t_{1/2}(\text{e.m.}) = 1,31 \times 10^5 \text{ s}$$

c) De Weisskopf afschattingen zijn gebaseerd op één-deeltje overgangen. Omdat die toestanden in ^{121}In goed met het schillenmodel overeenkomen, verwachten we de afschatting vrij nauwkeurig te zijn (binnen één orde van grootte of zo).

- d) We schatten de halfwaarde tijd voor β^- verval uit de typische waarden voor $\log ft$ die in de tabel zijn weergegeven, en de waarden van $\log f$ in de figuren.

Eerst moeten we de karakter van de mogelijke bètavervallen bepalen:

$1/2^- \rightarrow 3/2^+$: $\Delta\pi$ JA $\Rightarrow L = 1, 3, \dots$; laagste $\Delta I = 1 \Rightarrow L = 1, S = 0$ of 1: 1^{ste} verboden F+GT

$1/2^- \rightarrow 11/2^-$: $\Delta\pi$ NEE $\Rightarrow L = 0, 2, 4, \dots$; laagste $\Delta I = 5 \Rightarrow L = 4, S = 1$: 5^{de} verboden GT

$1/2^- \rightarrow 1/2^+$: $\Delta\pi$ JA $\Rightarrow L = 1, 3, \dots$; $\Delta I = 0 \Rightarrow L = 1, S = 1$; of $\Delta I = 1 \Rightarrow L = 1, S = 0$ of 1: 1^{ste} verboden F+GT

We mogen de overgang naar de $11/2^-$ toestand verwaarlozen. Voor de andere twee overgangen nemen we, uit de tabel, de gemiddelde waarde $\log ft = 7,0$.

Voor de berekening van de Q -waarde moeten we rekening houden met de excitatie energie van de moeder- en dochtertoestanden. Uit Figuur 3 hebben we:

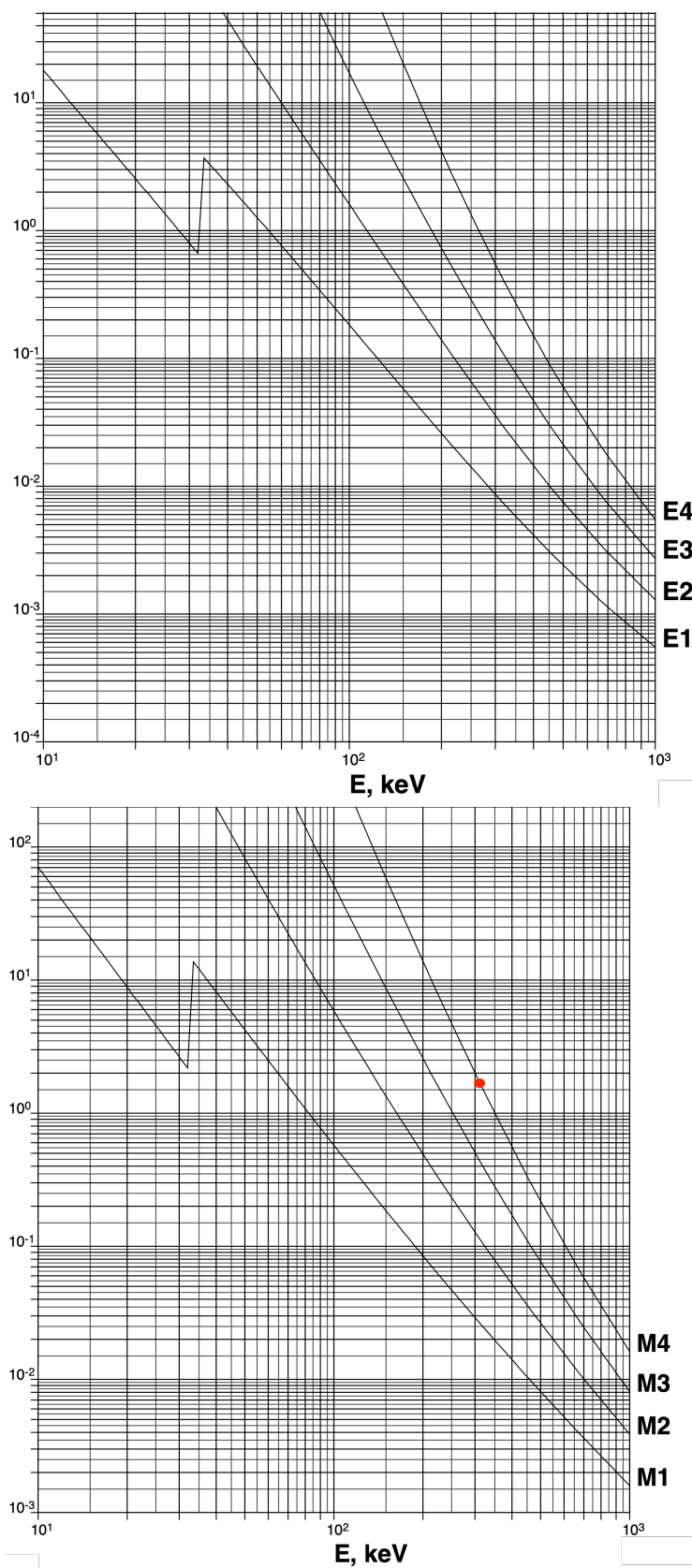
Overgang	ΔE (keV)	f	$\log f$	$\log ft$	$\log t_{1/2}$ (s)	λ (s^{-1})
$1/2^- \rightarrow 3/2^+$	3677	$5,1 \times 10^3$	3,71	7,0	3,3	$3,5 \times 10^{-3}$
$1/2^- \rightarrow 1/2^+$	3617	$5,0 \times 10^3$	3,70	7,0	3,3	$3,5 \times 10^{-3}$

The totale vervalconstante voor β^- is $\lambda(\beta^-) = 7,0 \times 10^{-3} s^{-1} \Rightarrow t_{1/2}(\beta^-) = 990 s$.

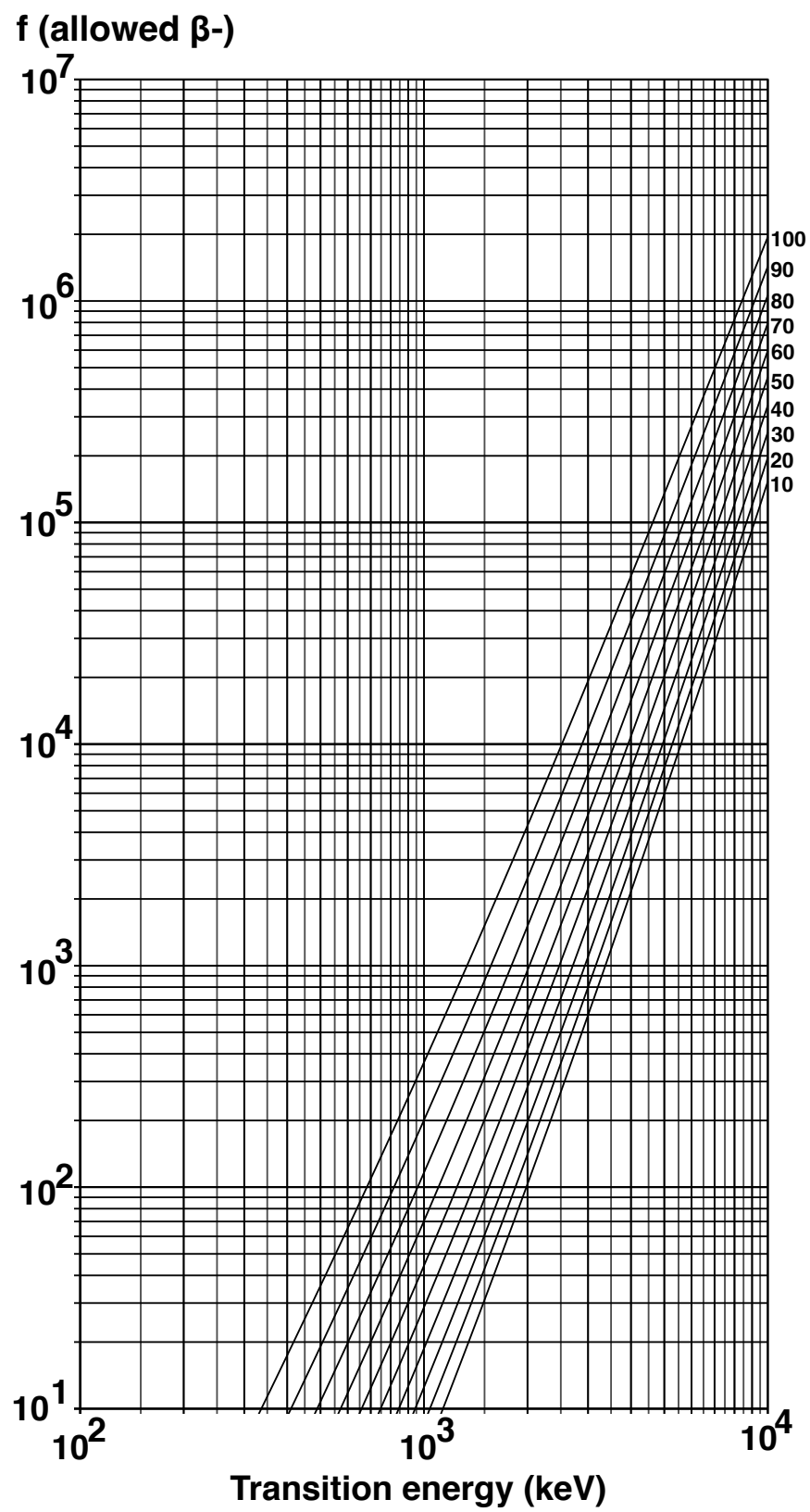
- e) De verschillende vervalkanalen bieden bijkomende mogelijkheden voor verval. De totale halfwaarde tijd zal dus korter zijn dan de partiële waarden.

Type	ΔI	$\log ft$
Superallowed	0 or 1	3.5
Allowed	0	5.0–7.0
Allowed	1	4.5–6.5
1 st forbidden	0 or 1	6.5–7.5
1 st forbidden (unique)	2	9–10
2 nd forbidden	2	11–15
2 nd forbidden (unique)	3	13–18

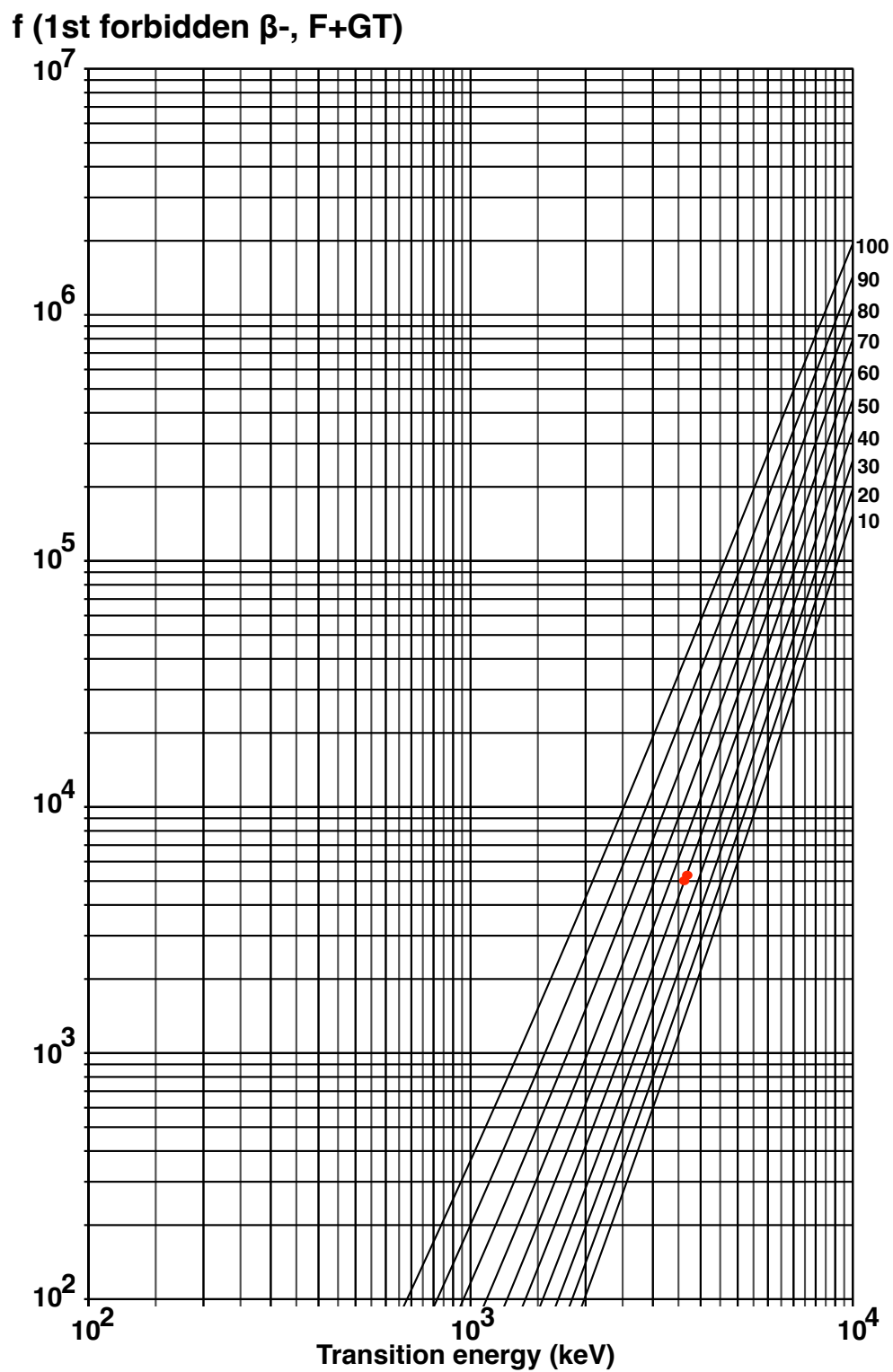
Tabel 1: Typische $\log ft$ waarden voor verschillende soorten β verval.



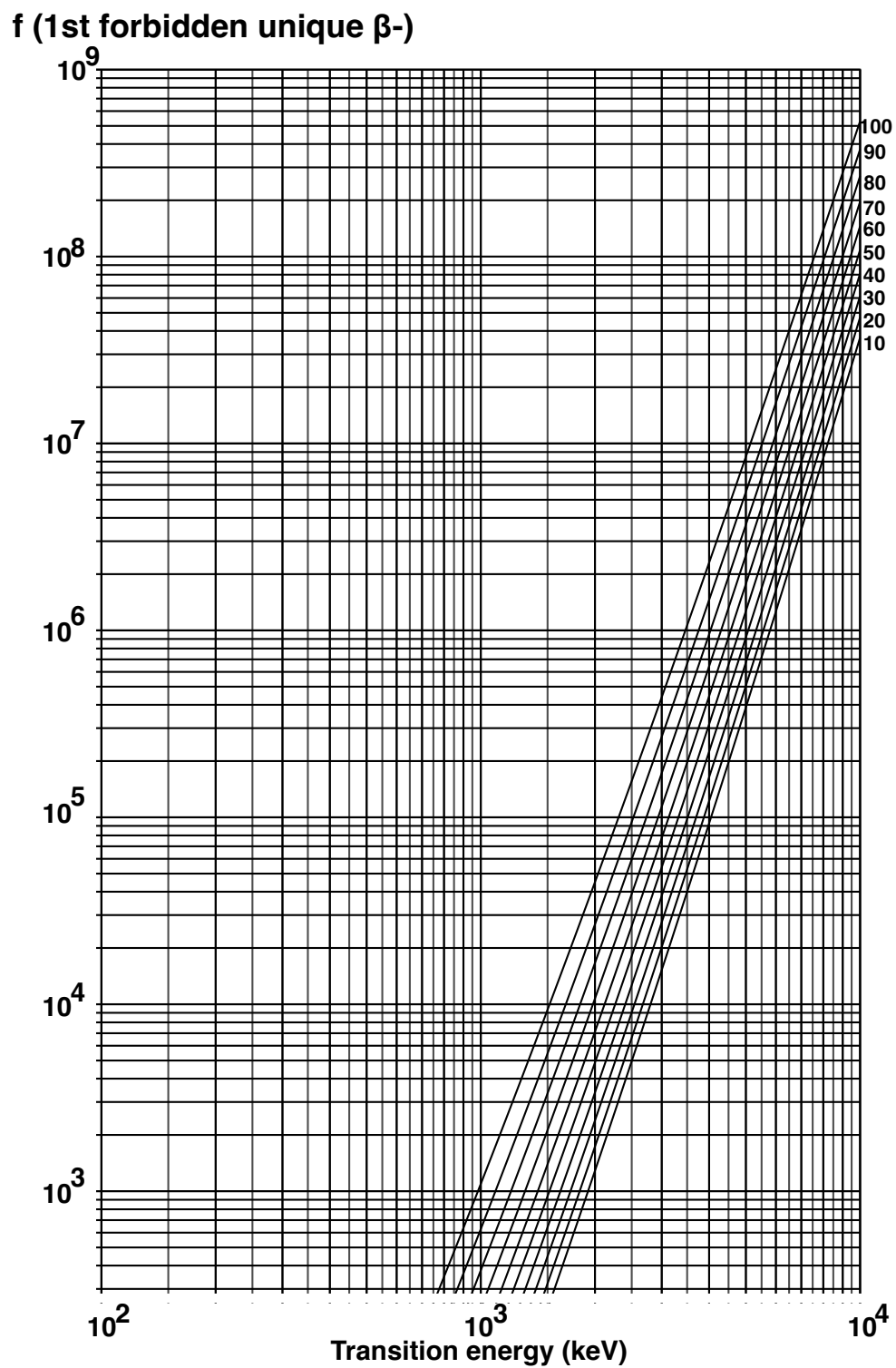
Figuur 1: Totale coëfficiënten voor interne conversie van elektromagnetische overgangen voor $Z = 50$.



Figuur 2: f_{β^-} functie voor toegelaten overgangen, $Z = 10-100$.



Figuur 3: f_{β^-} functie voor 1^{ste} verboden F+GT overgangen, $Z = 10-100$.



Figuur 4: f_{β^-} functie voor eerste verboden unieke overgangen, $Z = 10-100$.

CONSTANTS

Speed of light	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
Charge of electron	e	$1.602189 \times 10^{-19} \text{ C}$
Boltzmann constant	k	$1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ $8.6174 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Planck's constant	h	$6.62618 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $4.13570 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1.054589 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $6.58217 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Gravitational constant	G	$6.6726 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Avogadro's number	N_A	$6.022045 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1}$
Universal gas constant	R	$8.3144 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$
Stefan-Boltzmann constant	σ	$5.6703 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$
Rydberg constant	R_∞	$1.0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
Hydrogen ionization energy		13.60580 eV
Bohr radius	a_0	$5.291771 \times 10^{-11} \text{ m}$
Bohr magneton	μ_B	$9.27408 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ $5.78838 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$
Nuclear magneton	μ_N	$5.05084 \times 10^{-27} \text{ J/T}$ $3.15245 \times 10^{-8} \text{ eV/T}$
Fine structure constant	α	$1/137.0360$
	hc	$1239.853 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$
	$\hbar c$	$197.329 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$
	$e^2/4\pi\epsilon_0$	$1.439976 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$

PARTICLE REST MASSES

	u	MeV/c^2
Electron	5.485803×10^{-4}	0.511003
Proton	1.00727647	938.280
Neutron	1.00866501	939.573
Deuteron	2.01355321	1875.628
Alpha	4.00150618	3727.409
$\pi^\pm$	0.1498300	139.5669
π^0	0.1448999	134.9745
μ	0.1134292	105.6595

CONVERSION FACTORS

$$1 \text{ eV} = 1.602189 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV}/c^2$$

$$= 1.660566 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ decays/s}$$