Examen Wiskunde II
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie en Chemie
maandag 8 juni 2009, 8:30–13:00

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(en):

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; zonder los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent (Eva Leenknegt, Leen Prenen of Christophe Smet).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

met p een vast reëel getal.

(a) Bereken het volume van het parallellepipidum dat opgespannen wordt door $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

Voor welke p is het volume minimaal?

(b) Zij $\vec{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ een vector die voldoet aan

$$A\vec{x} \times \vec{c} = \vec{0}, \qquad A\vec{x} \cdot \vec{b} = 1.$$

Zet deze voorwaarden om in een stelsel vergelijkingen voor x, y en z. Geef de matrix van dit stelsel en los op. Voor welke waarden van p is het stelsel strijdig, wanneer is er een unieke oplossing en waneer zijn er oneindig veel oplossingen

(c) Voor welke waarden van p zijn alle eigenwaarden van A reëel ?

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Beschouw een model voor de populatie van twee diersoorten A en B in een zeker gebied. Het aanwezige aantal van soort A na n maanden geven we aan met a_n en dat van soort B met b_n. We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + qb_n \qquad \text{en} \qquad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}qa_n.$$

Hierin is $q \geq 0$ een constante.

(a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van q).

(b) Voor welke waarden van $q \geq 0$ treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?

(c) Voor welke q is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $a_0 = 4000$ en $b_0 = 1000$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Bij een chemische reactie van de vorm

$$2A + B \longrightarrow C$$

voldoen de concentraties $a(t)$ en $b(t)$ van stoffen A en B aan

$$\frac{da}{dt} = -2ra^2b, \qquad \text{en} \qquad \frac{db}{dt} = -ra^2b,$$

waarin $r > 0$ de reactieconstante is.

(a) Laat zien dat er een constante K bestaat zodanig dat

$$\frac{da}{dt} = -ra^2(a + K).$$

(b) Los deze differentiaalvergelijking op voor het geval $K = 0$. Neem $a(0) = 10$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Bereken de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = \sin t$$

die voldoet aan

$$x(0) = 0 \qquad \text{en} \qquad x'(0) = 0.$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 (a) Bereken de Fourierreeks van de 2π-periodieke functie f die op $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq |x| < \pi/2, \\ 1 & \text{als } \pi/2 \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(b) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de Fourierreeks convergent? Wat is de waarde van de Fourierreeks in $x = 5/2\pi$?

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 Zij D het gebied dat in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$D: \quad 1 \leq r \leq R, \qquad -\alpha\pi \leq \theta \leq \alpha\pi$$

met $R > 1$ en $0 < \alpha < 1$. Het gebied D bevat een metalen plaat met een uniforme massadichtheid $\rho(x, y) = \rho_0 > 0$.

(a) Bereken de oppervlakte van D.

(b) Laat zien dat de x-coördinaat van het massamiddelpunt $X = (\bar{x}, \bar{y})$ van D gelijk is aan $\bar{x} = F(\alpha)\, G(R)$ met $F(\alpha)$ een functie die alleen afhankelijk is van α en

$$G(R) = \frac{2(R^3 - 1)}{3(R^2 - 1)}.$$

(c) Bereken de Taylorreeks van $G(R)$ rond $R = 1$, waarbij we $G(1)$ definiëren door

$$G(1) = \lim_{R \to 1} G(R).$$

Antwoord: