

Examen Wiskunde II
Bachelor Biochemie & Biotechnologie en Chemie
vrijdag 24 augustus 2012, 9:00–13:30
Auditorium 200C. aud A.

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(e):

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent(en) (Simon Allewaert, Bart Jacobs, Michaël Moreels, Berdien Peeters, Kristof Schoels).
- Kladpapier wordt niet nagekeken en hoeft u ook niet in te leveren.
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = 3 \\ 3x & -y & -\alpha z & = \beta \\ x & -y & +z & = 2 \end{cases}$$

waarin α en β constanten zijn.

- (a) Bepaal alle α en β waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.
- (b) Bepaal alle α en β waarvoor het stelsel geen oplossing heeft.
- (c) In het geval dat het stelsel meer dan één oplossing heeft, bepaalt het stelsel een rechte. Geef een parametervergelijking voor deze rechte.

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Beschouw een model voor de populatie van konijnen en vossen in een zeker gebied. Het aantal konijnen na n maanden wordt aangegeven met K_n en het aantal vossen met V_n . We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$K_{n+1} = \frac{4}{3}K_n - \frac{1}{3}V_n \quad \text{en} \quad V_{n+1} = \lambda V_n + \frac{1}{2}K_n.$$

Hierin is $\lambda \in [0, 1]$ een constante.

- (a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van λ).
- (b) Voor welke λ is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $K_0 = 600$ en $V_0 = 100$.
- (c) Voor welke waarden van $\lambda \in [0, 1]$ treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Beschouw de differentiaalvergelijking

$$x \frac{dy}{dx} + 6y = 2xy^2.$$

(a) Schrijf $v = y^{-1}$ en laat zien dat v voldoet aan

$$x \frac{dv}{dx} - 6v = -2x$$

(b) Los de differentiaalvergelijking voor v op.

(c) Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking voor y die voldoet aan $y(1) = 1$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 (a) Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0.$$

(b) Bepaal de oplossing van

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 2 \cos^2 t.$$

die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x = 1 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{voor } t = 0.$$

[Hint bij (b): denk aan goniometrische formule $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$.]

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 (a) Geef alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$$

convergent is. Bepaal voor deze waarden van x de som van de reeks.

(b) Bereken de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\binom{2k}{k}}.$$

(c) Bereken de Taylorreeks van de functie $f(x) = 1/x^2$ rond $x = 1$. Wat is het convergentiegebied van de Taylorreeks?

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 Zij D het gebied in het eerste kwadrant van $\mathbb{R}^2$ dat gegeven wordt door

$$D : \quad x \geq y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

met $R > 0$. D bevat een metalen plaat met constante massadichtheid $\rho(x, y) = 2$.

- (a) Schets D . Wat is de totale massa van D ?
- (b) Stel een integraal over D op die het traagheidsmoment van D t.o.v. een rechte $x + y = c$ weergeeft. U hoeft deze integraal niet uit te rekenen.
- (c) Het traagheidsmoment uit (b) is minimaal als

$$\iint_D (x + y - c) \, dx dy = 0$$

(dit hoeft u niet te laten zien). Bepaal c zodanig dat het traagheidsmoment t.o.v. de rechte $x + y = c$ minimaal is.

Antwoord: