Examen G0U13C Bewijzen en Redeneren
Bachelor Fysica

maandag 11 januari 2021, 16:00–19:00

De Nayer GBDN.01.A074 (76 studenten)
(2 studenten met faciliteiten, 16:00-20:00)

Naam:

- Het examen bestaat uit 3 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je <u>enkel</u> het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Zet je naam op elk blad.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 4 pt (b) 3 pt (c) 3 pt

  Vraag 2: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt

  Vraag 3: (a) 3 pt (b) 3 pt (c) 4 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)			
Totaal (op 30)		EINDCIJFER (op 20)	

Vraag 1.

4pt (a) Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{n}{3} + 1 \tag{1}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

3pt (b) Geef de ontkenning van de volgende uitspraak over een rij van reële getallen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \forall j \in \mathbb{N} : \quad (k > j \wedge j \geq n) \implies |a_j - a_k| < \varepsilon$$

U mag de negatie $\neg$ en de implicatie $\implies$ niet gebruiken.

3pt (c) Neem aan dat X een aftelbaar oneindige verzameling is. Is

$$\{A \in P(X) \mid A \text{ is eindig}\}$$

dan een eindige, een aftelbaar oneindige of een overaftelbare verzameling? Verklaar uw antwoord.

Antwoord 1. (a) Beginstap: Voor $n = 1$ geldt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$ en $\frac{n}{3} + 1 = \frac{4}{3}$. Dan is het duidelijk dat (1) geldt voor $n = 1$.

Het blijkt dat we in de beginstap ook $n = 2$ moeten controleren. Voor $n = 2$ geldt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2}, \qquad \text{en} \qquad \frac{n}{3} + 1 = 1 + \frac{2}{3}.$$

Omdat $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ geldt de ongelijkheid (1) ook voor $n = 2$.

Inductiestap: In de inductiestap nemen we $n \in \mathbb{N}_0$ met $n \geq 2$ willekeurig en we veronderstellen dat (1) geldt. Dan geldt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{3} + 1 + \frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

Omdat $n \geq 2$ is $n + 1 \geq 3$ en $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$. Er volgt dat

$$\frac{n}{3} + 1 + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{n+1}{3} + 1. \tag{3}$$

Uit (2) en (3) volgt dat

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \leq \frac{n+1}{3} + 1$$

zodat de ongelijkheid (1) ook geldt met n vervangen door $n+1$. Hiermee is de inductiestap bewezen.

Conclusie: Omdat de beginstap en de inductiestap bewezen zijn volgt dat (1) geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ vanwege het principe van volledige inductie.

(b) De ontkenning is

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N} : \quad (k > j \wedge j \geq n) \wedge |a_j - a_k| \geq \varepsilon$$

(c) De verzameling is aftelbaar oneindig.

De verzameling waar het over gaat is een aftelbare unie

$$\{A \in P(X) \mid A \text{ is eindig}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \tag{4}$$

met

$$V_n = \{A \in P(X) \mid |A| = n\}.$$

We laten zien dat elke V_n afelbaar is. Als dat lukt dan kunnen we concluderen dat ook $\{A \in P(X) \mid A \text{ is eindig}\}$ aftelbaar is, want dan is (4) een aftelbare unie van aftelbare verzamelingen. Bovendien zullen we zien dat V_1 aftelbaar oneindig is, zodat (4) aftelbaar oneindig is.

Voor $n = 0$ is $V_0 = \{\emptyset\}$ een verzameling met maar één element. Dit is een eindige verzameling en dus aftelbaar.

Voor $n = 1$ is V_1 de verzameling van alle deelverzamelingen van X met maar één element. Deze verzameling is equipotent met X zelf. Immers

$$x \in X \mapsto \{x\} \in V_1$$

is een bijectie. Omdat X aftelbaar oneindig is, is V_1 ook aftelbaar oneindig.

Voor $n \geq 2$ gebruiken we dat het Cartesisch product

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ keer}}$$

aftelbaar oneindig is. De functie

$$X^n \to \bigcup_{k=1}^{n} V_k : \quad (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\} \tag{5}$$

is geen bijectie, maar ze is wel surjectief. Immers, als $A \in V_k$ voor zekere $k \in \{1, \ldots, n\}$, dan is $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ voor zekere $x_1, \ldots, x_k \in X$ die onderling verschillend zijn. Als $k < n$ dan nemen we $x_{k+1} = \cdots = x_n = x_1$ en dan zal $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ en het beeld van $(x_1, \ldots, x_n)$ onder de functie (5) is gelijk aan A.

Omdat (4) surjectief is en X^n aftelbaar oneindig is, is ook $\bigcup_{k=1}^{n} V_k$ aftelbaar, en in het bijzonder is V_n aftelbaar.

Vraag 2. Zij $f : X \to Y$ een functie.

3pt (a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A \subset X$ en $B \subset Y$ geldt

$$A \subset f^{-1}(B) \implies f(A) \subset B.$$

2pt (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

niet altijd hoeft te gelden.

5pt (c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

als en slechts als f surjectief is.

Antwoord 2. (a) Veronderstel dat $A \subset f^{-1}(B)$ geldt. Neem $y \in f(A)$ willekeurig. Dan is er een $a \in A$ met $y = f(a)$. Omdat $A \subset f^{-1}(B)$ is dan $a \in f^{-1}(B)$, hetgeen betekent dat $f(a) \in B$. Vanwege $y = f(a)$ zien we dat $y \in B$. Omdat $y \in f(A)$ willekeurig gekozen was is de inclusie $f(A) \subset B$ bewezen en de implicatie uit (a) is aangetoond.

(b) Hier is een mogelijk voorbeeld. Neem $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$ en $f : X \to Y$ met $f(1) = 2$. Neem ook $A = \{1\}$ en $B = \{3\}$. Dan is $f(A) = \{2\}$ en $f^{-1}(B) = \emptyset$. We zien dat $f^{-1}(B) \subset A$ juist is, maar $B \subset f(A)$ niet. De implicatie geldt bijgevolg

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

niet in dit voorbeeld.

(c) Zij P de uitspraak

$$P : \quad \forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

en Q de uitspraak $Q :$ f is surjectief. We gaan de twee implicaties $P \implies Q$ en $Q \implies P$ bewijzen.

Bewijs dat $P \implies Q$ Veronderstel dat P geldt. Dan weten we dat de implicatie

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A) \tag{6}$$

geldt voor elke $A \subset X$ en $B \subset Y$. We gaan laten zien dat f surjectief is door op een slimme manier A en B te kiezen.

Neem $y \in Y$ willekeurig. Neem $B = \{y\}$ en $A = X$. Dan geldt de implicatie (6) hetgeen betekent dat

$$f^{-1}(y) \subset X \implies \{y\} \subset f(X)$$

geldt. Uiteraard is $f^{-1}(y) \subset X$ en vanwege de bovenstaande implicatie geldt dus $\{y\} \subset f(X)$. Bijgevolg is $y \in f(X)$, en dit betekent dat er een $x \in X$ is met $y = f(x)$.

Omdat $y \in Y$ willekeurig gekozen was is nu bewezen dat f surjectief is. De implicatie $P \implies Q$ is bewezen.

Bewijs dat $Q \implies P$ Neem nu omgekeerd aan dat Q geldt; dus dat f surjectief is. Neem $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$ willekeurig. We moeten laten zien dat

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A) \tag{7}$$

geldt.

Daartoe veronderstellen we dat $f^{-1}(B) \subset A$ geldt en we kiezen $y \in B$ willekeurig. Omdat f surjectief is bestaat er een $x \in X$ met $y = f(x)$. Dan is $f(x) \in B$ en dus $x \in f^{-1}(B)$. Omdat $f^{-1}(B) \subset A$ is dan ook $x \in A$ en dus $f(x) \in f(A)$. Vanwege $y = f(x)$ vinden we $y \in f(A)$.

Omdat $y \in B$ willekeurig gekozen was is de inclusie $B \subset f(A)$ bewezen. De implicatie (7) is bewezen. Omdat A en B willekeurig waren gekozen geldt P en de implicatie $Q \implies P$ is bewezen.

Vraag 3. Voor een functie $f : X \to X$ en $n \in \mathbb{N}_0$ definiëren we

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ keer}}.$$

Dus $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, enz. In deze vraag mag u zonder bewijs gebruiken dat

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : \quad f_{n+m} = f_n \circ f_m.$$

3pt (a) Neem aan dat $f : X \to X$ zodanig is dat

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \forall x \in X : \quad f_n(x) = x. \tag{8}$$

Bewijs dat f een bijectie is.

3pt (b) In plaats van (8) nemen we nu aan dat $f : X \to X$ voldoet aan

$$\forall x \in X : \exists n \in \mathbb{N}_0 : \quad f_n(x) = x. \tag{9}$$

Volgt nu nog steeds dat f een bijectie is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

4pt (c) Zij R de relatie op X gegeven door

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : f_n(x) = y\}.$$

Neem opnieuw aan dat (9) geldt. Bewijs dat R een equivalentierelatie is op X.

Antwoord 3. (a) Er is een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = x$ voor elke $x \in X$. Dus f_n is de eenheidsfunctie 1_X op X. Als $n = 1$ dan is $f = 1_X$ en f is bijectief, want de eenheidsfunctie op X is zeker bijectief. Neem vervolgens aan dat $n \geq 2$. Dan is $f \circ f_{n-1} = f_n = 1_X$ en $f_{n-1} \circ f = f_n = 1_X$, zodat f_{n-1} de inverse functie is van f. Dus f is bijectief.

(b) Nu nemen we aan dat (9) geldt.

We bewijzen eerst dat f surjectief is. Neem $y \in X$ willekeurig. Vanwege (9) is er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(y) = y$. Als $n = 1$ dan nemen we $x = y$ en er volgt $f(x) = f(y) = f_1(y) = y$. Als $n \geq 2$, dan nemen we $x = f_{n-1}(y)$. Dan volgt $f(x) = (f \circ f_{n-1})(y) = f_n(y) = y$. In alle gevallen is er een $x \in X$ met $f(x) = y$ en er is bewezen dat f surjectief is.

Vervolgens bewijzen we dat f injectief is. Neem $x, y \in X$ met $f(x) = f(y)$. Vanwege (9) zijn er $n, m \in \mathbb{N}_0$ met $x = f_n(x)$ en $y = f_m(y)$.

Merk nu op dat $f_{2n} = f_n \circ f_n$, zodat

$$f_{2n}(x) = f_n(f_n(x)) = f_n(x) = x.$$

Meer algemeen geldt $f_{kn}(x) = x$ voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ hetgeen met inductie eenvoudig aan te tonen is. Evenzo is $f_{km}(y) = y$ voor elke $k \in \mathbb{N}_0$. In het bijzonder volgt hieruit dat

$$f_{mn}(x) = x \quad \text{ en } f_{mn}(y) = y. \tag{10}$$

Als $m = n = 1$, dan betekent (10) dat $f(x) = x$ en $f(y) = y$. Omdat $f(x) = f(y)$ volgt er dat $x = y$ in dit geval. Als m en n niet allebei 1 zijn, dan is $mn \geq 2$ en er geldt $f_{mn} = f_{mn-1} \circ f$. Omdat $f(x) = f(y)$ volgt hieruit $f_{mn}(x) = f_{mn}(y)$. Vanwege (10) is ook $x = y$ in dit geval. In alle gevallen volgt $x = y$ en bijgevolg is f injectief.

Er is bewezen dat f zowel surjectief als injectief is. Dus f is een bijectie.

(c) We bewijzen dat R reflexief, symmetrisch en transitief is.

Reflexief Kies $x \in X$ willekeurig. Vanwege (9) is er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = x$. Uit de definitie van R volgt dan meteen dat $(x, x) \in R$ en bijgevolg is R reflexief.

Symmetrisch Neem $x, y \in X$ en veronderstel $(x, y) \in R$. Er is dan een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = y$. Vanwege (9) is er een $m \in \mathbb{N}_0$ met $f_m(x) = x$. Voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ is dan ook $f_{km}(x) = x$. Door k voldoende groot te nemen kunnen we bereiken dat $km > n$. Dan is $km - n \in \mathbb{N}_0$ met

$$f_{km-n}(y) = f_{km-n}(f_n(x)) = f_{km}(x) = x.$$

Dus $(y, x) \in R$ en bewezen is dat R symmetrisch is.

Transitief Neem $x, y, z \in X$ willekeurig met $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$. Er zijn dan $n, m \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = y$ en $f_m(y) = z$. Dan is

$$f_{n+m}(x) = f_m(f_n(x)) = f_m(y) = z$$

met $n + m \in \mathbb{N}_0$. Dus $(x, z) \in R$ en R is transitief.