**Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren**
**Bachelor Wiskunde + TWIN**

**maandag 11 januari 2021, 16:00–19:00**

**De Nayer GBDN.01.A074 (61 studenten)**
**(2 studenten met faciliteiten, 16:00-20:00)**

**Naam:**

**Studierichting:**

- Het examen bestaat uit 4 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je enkel het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Zet je naam op elk blad.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
  Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt
  Vraag 2: (a) 3 pt (b) 3 pt (c) 4 pt
  Vraag 3: (a) 6 pt (b) 4 pt
  Vraag 4: (a) 5 pt (b) 5 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Vraag 1 (op 10) | | Totaal (op 40) | |
| Vraag 2 (op 10) | | LaTeX opdracht (op 20) | |
| Vraag 3 (op 10) | | | |
| Vraag 4 (op 10) | | | |
| Totaal (op 40) | | EINDCIJFER (op 20) | |

**Vraag 1** Zij $f : X \to Y$ een functie.

3pt (a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A \subset X$ en $B \subset Y$ geldt

$$A \subset f^{-1}(B) \implies f(A) \subset B.$$

2pt (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

niet altijd hoeft te gelden.

5pt (c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \; f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

als en slechts als $f$ surjectief is.

**Antwoord 1** (a) Veronderstel dat $A \subset f^{-1}(B)$ geldt. Neem $y \in f(A)$ willekeurig. Dan is er een $a \in A$ met $y = f(a)$. Omdat $A \subset f^{-1}(B)$ is dan $a \in f^{-1}(B)$, hetgeen betekent dat $f(a) \in B$. Vanwege $y = f(a)$ zien we dat $y \in B$. Omdat $y \in f(A)$ willekeurig gekozen was is de inclusie $f(A) \subset B$ bewezen en de implicatie uit (a) is aangetoond.

(b) Hier is een mogelijk voorbeeld. Neem $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$ en $f : X \to Y$ met $f(1) = 2$. Neem ook $A = \{1\}$ en $B = \{3\}$. Dan is $f(A) = \{2\}$ en $f^{-1}(B) = \emptyset$. We zien dat $f^{-1}(B) \subset A$ juist is, maar $B \subset f(A)$ niet. De implicatie geldt bijgevolg

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

niet in dit voorbeeld.

(c) Zij $P$ de uitspraak

$$P : \quad \forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \; f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

en $Q$ de uitspraak $Q :$ $f$ is surjectief. We gaan de twee implicaties $P \implies Q$ en $Q \implies P$ bewijzen.

**Bewijs dat** $P \implies Q$ Veronderstel dat $P$ geldt. Dan weten we dat de implicatie

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A) \tag{1}$$

geldt voor elke $A \subset X$ en $B \subset Y$. We gaan laten zien dat $f$ surjectief is door op een slimme manier $A$ en $B$ te kiezen.

Neem $y \in Y$ willekeurig. Neem $B = \{y\}$ en $A = X$. Dan geldt de implicatie (1) hetgeen betekent dat

$$f^{-1}(y) \subset X \implies \{y\} \subset f(X)$$

geldt. Uiteraard is $f^{-1}(y) \subset X$ en vanwege de bovenstaande implicatie geldt dus $\{y\} \subset f(X)$. Bijgevolg is $y \in f(X)$, en dit betekent dat er een $x \in X$ is met $y = f(x)$.

Omdat $y \in Y$ willekeurig gekozen was is nu bewezen dat $f$ surjectief is. De implicatie $P \implies Q$ is bewezen.

**Bewijs dat $Q \implies P$** Neem nu omgekeerd aan dat $Q$ geldt; dus dat $f$ surjectief is. Neem $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$ willekeurig. We moeten laten zien dat

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A) \tag{2}$$

geldt.

Daartoe veronderstellen we dat $f^{-1}(B) \subset A$ geldt en we kiezen $y \in B$ willekeurig. Omdat $f$ surjectief is bestaat er een $x \in X$ met $y = f(x)$. Dan is $f(x) \in B$ en dus $x \in f^{-1}(B)$. Omdat $f^{-1}(B) \subset A$ is dan ook $x \in A$ en dus $f(x) \in f(A)$. Vanwege $y = f(x)$ vinden we $y \in f(A)$.

Omdat $y \in B$ willekeurig gekozen was is de inclusie $B \subset f(A)$ bewezen. De implicatie (2) is bewezen. Omdat $A$ en $B$ willekeurig waren gekozen geldt $P$ en de implicatie $Q \implies P$ is bewezen.

**Vraag 2** Voor een functie $f : X \to X$ en $n \in \mathbb{N}_0$ definiëren we

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ keer}}.$$

Dus $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, enz. In deze vraag mag u zonder bewijs gebruiken dat

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : \quad f_{n+m} = f_n \circ f_m.$$

3pt (a) Neem aan dat $f : X \to X$ zodanig is dat

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \forall x \in X : \quad f_n(x) = x. \tag{3}$$

Bewijs dat $f$ een bijectie is.

3pt (b) In plaats van (3) nemen we nu aan dat $f : X \to X$ voldoet aan

$$\forall x \in X : \exists n \in \mathbb{N}_0 : \quad f_n(x) = x. \tag{4}$$

Volgt nu nog steeds dat $f$ een bijectie is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

4pt (c) Zij $R$ de relatie op $X$ gegeven door

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : f_n(x) = y\}.$$

Neem opnieuw aan dat (4) geldt. Bewijs dat $R$ een equivalentierelatie is op $X$.

**Antwoord 2** (a) Er is een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = x$ voor elke $x \in X$. Dus $f_n$ is de eenheidsfunctie $1_X$ op $X$. Als $n = 1$ dan is $f = 1_X$ en $f$ is bijectief, want de eenheidsfunctie op $X$ is zeker bijectief. Neem vervolgens aan dat $n \geq 2$. Dan is $f \circ f_{n-1} = f_n = 1_X$ en $f_{n-1} \circ f = f_n = 1_X$, zodat $f_{n-1}$ de inverse functie is van $f$. Dus $f$ is bijectief.

(b) Nu nemen we aan dat (4) geldt.

We bewijzen eerst dat $f$ surjectief is. Neem $y \in X$ willekeurig. Vanwege (4) is er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(y) = y$. Als $n = 1$ dan nemen we $x = y$ en er volgt $f(x) = f(y) = f_1(y) = y$. Als $n \geq 2$, dan nemen we $x = f_{n-1}(y)$. Dan volgt $f(x) = (f \circ f_{n-1})(y) = f_n(y) = y$. In alle gevallen is er een $x \in X$ met $f(x) = y$ en er is bewezen dat $f$ surjectief is.

Vervolgens bewijzen we dat $f$ injectief is. Neem $x, y \in X$ met $f(x) = f(y)$. Vanwege (4) zijn er $n, m \in \mathbb{N}_0$ met $x = f_n(x)$ en $y = f_m(y)$.

Merk nu op dat $f_{2n} = f_n \circ f_n$, zodat

$$f_{2n}(x) = f_n(f_n(x)) = f_n(x) = x.$$

Meer algemeen geldt $f_{kn}(x) = x$ voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ hetgeen met inductie eenvoudig aan te tonen is. Evenzo is $f_{km}(y) = y$ voor elke $k \in \mathbb{N}_0$. In het bijzonder volgt hieruit dat

$$f_{mn}(x) = x \quad \text{en } f_{mn}(y) = y. \tag{5}$$

Als $m = n = 1$, dan betekent (5) dat $f(x) = x$ en $f(y) = y$. Omdat $f(x) = f(y)$ volgt er dat $x = y$ in dit geval. Als $m$ en $n$ niet allebei 1 zijn, dan is $mn \geq 2$ en er geldt $f_{mn} = f_{mn-1} \circ f$. Omdat $f(x) = f(y)$ volgt hieruit $f_{mn}(x) = f_{mn}(y)$. Vanwege (5) is ook $x = y$ in dit geval. In alle gevallen volgt $x = y$ en bijgevolg is $f$ injectief.

Er is bewezen dat $f$ zowel surjectief als injectief is. Dus $f$ is een bijectie.

(c) We bewijzen dat $R$ reflexief, symmetrisch en transitief is.

Reflexief Kies $x \in X$ willekeurig. Vanwege (4) is er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = x$. Uit de definitie van $R$ volgt dan meteen dat $(x, x) \in R$ en bijgevolg is $R$ reflexief.

Symmetrisch Neem $x, y \in X$ en veronderstel $(x, y) \in R$. Er is dan een $n \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = y$. Vanwege (4) is er een $m \in \mathbb{N}_0$ met $f_m(x) = x$. Voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ is dan ook $f_{km}(x) = x$. Door $k$ voldoende groot te nemen kunnen we bereiken dat $km > n$. Dan is $km - n \in \mathbb{N}_0$ met

$$f_{km-n}(y) = f_{km-n}(f_n(x)) = f_{km}(x) = x.$$

Dus $(y, x) \in R$ en bewezen is dat $R$ symmetrisch is.

Transitief Neem $x, y, z \in X$ willekeurig met $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$. Er zijn dan $n, m \in \mathbb{N}_0$ met $f_n(x) = y$ en $f_m(y) = z$. Dan is

$$f_{n+m}(x) = f_m(f_n(x)) = f_m(y) = z$$

met $n + m \in \mathbb{N}_0$. Dus $(x, z) \in R$ en $R$ is transitief.

**Vraag 3**

6pt (a) Gebruik de $\varepsilon$-$n_0$ definitie om te bewijzen dat de rij $(a_n)_n$ gegeven door

$$a_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 2021}}{n+1}.$$

convergent is.

4pt (b) De rij $(b_n)_n$ wordt gegeven door $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ en

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{n}}, \qquad n \geq 1.$$

Laat zien dat de rij $(b_n)_n$ stijgend is. Onderzoek of de rij convergent is. Bewijs uw antwoord.

**Antwoord 3** (a) We bewijzen dat de limiet gelijk is aan $L = 2$.
Er geldt

$$|a_n - L| = \left| \frac{\sqrt{4n^2 + 2021}}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{\sqrt{4n^2 + 2021} - 2(n+1)}{n+1} \right|.$$

We gebruiken de worteltruc om dit verder te herschrijven tot

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \frac{|(4n^2 + 2021) - 4(n+1)^2|}{(n+1)(\sqrt{4n^2 + 2021} + 2(n+1))} \\ &= \frac{|2017 - 8n|}{(n+1)(\sqrt{4n^2 + 2021} + 2(n+1))}. \end{aligned} \tag{6}$$

Als $n \geq 300$ dan kunnen we de teller van (6) afschateen door

$$|2017 - 8n| = 8n - 2017 \leq 8n$$

en de noemer door

$$(n+1)(\sqrt{4n^2 + 2021} + 2(n+1)) > n(2n + 2n) = 4n^2 > 0.$$

Hieruit volgt

$$|a_n - L| < \frac{8n}{4n^2} = \frac{2}{n} \qquad \text{als } n \geq 300. \tag{7}$$

Na deze voorbereiding is het uiteindelijke $\varepsilon$-$n_0$ bewijs redelijk kort. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $n_0 = \max\{300, \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil\}$ en kies $n \geq n_0$ willekeurig. Dan is $n \geq 300$ zodat vanwege (7) geldt dat

$$|a_n - L| < \frac{2}{n}.$$

Tevens is $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$ hetgeen betekent dat $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$. De transitiviteit van de ordening leidt dan tot $|a_n - L| < \varepsilon$, en hiermee is bewezen dat de rij $(a_n)_n$ convergent is met limiet gelijk aan $L = 2$.

(b) Er geldt $b_{n+1}^2 = b_n^2 + \frac{1}{n} > b_n^2$ als $n \geq 1$. Omdat $b_n$ en $b_{n+1}$ positief zijn, volgt hieruit dat $b_{n+1} > b_n$ als $n \geq 1$. Ook geldt dat $b_1 = b_0$ vanwege de gegeven beginvoorwaarden. Bijgevolg is de rij $(b_n)_n$ stijgend.

Uit $b_{n+1}^2 = b_n^2 + \frac{1}{n}$ voor $n \geq 1$ en $b_1 = 0$ is het eenvoudig om met volledige inductie aan te tonen dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

$$b_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

We zien hier de partieelsommen van de harmonische reeks waarvan we weten dat ze divergent is. De rij $(b_n^2)_n$ is bijgevolg divergent. Dan is $(b_n)_n$ ook divergent.

**Vraag 4**

6pt (a) Neem aan dat $A \subset \mathbb{R}$ open, niet-leeg, en naar boven begrensd is. Neem aan dat $B \subset A$ een aftelbare deelverzameling van $A$ is. Bewijs dat $A \setminus B$ niet-leeg en naar boven begrensd is en dat

$$\sup(A \setminus B) = \sup(A).$$

4pt (b) Neem aan dat $(a_n)_n$ een begrensde rëele rij is en dat $(b_n)_n$ een deelrij van $(a_n)_n$ is. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

**Antwoord 4** (a) Een open interval $]a, b[$ met $a < b$ is overaftelbaar. Er bestaat namelijk een bijectie van $\mathbb{R}$ naar $]a, b[$ waarvoor we bv. de functie $f$ met functievoorschrift

$$f(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \operatorname{bgtan} x$$

kunnen nemen. Dus $]a, b[$ is equipotent met $\mathbb{R}$. Omdat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is, is $]a, b[$ dus inderdaad overtelbaar.

Omdat $A$ niet-leeg is, is er een $x_0 \in A$. Omdat $A$ open is, is $x_0$ een inwendig punt van $A$. Er is bijgevolg $r > 0$ met $]x_0 - r, x_0 + r[ \subset A$. Dit open interval is overaftelbaar, en omdat dit een deel van $A$ is, is $A$ zelf ook overaftelbaar. Omdat $B$ aftelbaar is, zal niet elk element van $A$ ook tot $B$ behoren, en bijgevolg is $A \setminus B$ niet-leeg.

Omdat $A \setminus B \subset A$ en $A$ is naar boven begrensd is $A \setminus B$ ook naar boven begrensd. $\sup A$ is namelijk een bovengrens van $A \setminus B$ en bijgevolg geldt

$$\sup(A \setminus B) \leq \sup A.$$

Er resteert ons nog om te bewijzen dat

$$\sup(A \setminus B) \geq \sup A. \tag{8}$$

en dit doen we door te bewijzen dat

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A \setminus B : x > \sup A - \varepsilon. \tag{9}$$

Immers, uit (9) volgt dat voor elke gegeven $\varepsilon > 0$ geldt dat $\sup A - \varepsilon$ geen bovengrens is van $A \setminus B$ en dus $\sup(A \setminus B) > \sup A - \varepsilon$. Omdat $\varepsilon > 0$ hierin willekeurig is, volgt (8).

Om (9) te bewijzen kiezen we $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is $\sup A - \varepsilon$ geen bovengrens van $A$. Er is dus een $a \in A$ met $a > \sup A - \varepsilon$. Omdat $A$ open is, is er een $r > 0$ met $]a - r, a + r[ \subset A$. Dan is $]a, a + r[$ een open interval, dat bijgevolg overaftelbaar is. Omdat $B$ aftelbaar is, bevat $]a, a+r[$ zeker een element dat niet tot $B$ behoort. Neem zo'n element, zeg $x \in ]a, a + r[$ met $x \notin B$. Omdat $]a, a + r[ \subset A$ is dan $x \in A$, en dus $x \in A \setminus B$. Tevens is

$$x > a > \sup A - \varepsilon,$$

waarmee (9) bewezen is.

(b) Omdat $(b_n)_n$ een deelrij van $(a_n)_n$ is, bestaat er een strikt stijgende functie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ met

$$b_n = a_{\varphi(n)} \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

We definiëren zoals in de definitie van lim sup, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_n &= \{a_k \mid k \geq n\} \\ B_n &= \{b_k \mid k \geq n\}, \end{aligned}$$

waarvan we weten dat

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup A_n &= \limsup_{n\to\infty} a_n \\ \lim_{n\to\infty} \sup B_n &= \limsup_{n\to\infty} b_n. \end{aligned} \tag{11}$$

We bewijzen dat $B_n \subset A_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

- Neem $n \in \mathbb{N}$ en kies $x \in B_n$ willekeurig. Dan is er een $k \geq n$ met $x = b_k$. Vanwege (10) is dan $x = a_l$ met $l = \varphi(k)$. Omdat $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt stijgend is, zal $l \geq k$. Dan ook $l \geq n$ en er volgt dat $x = a_l \in A_n$.

Omdat $B_n \subset A_n$ geldt

$$\sup B_n \leq \sup A_n. \tag{12}$$

In de limiet $n \to \infty$ blijft de niet-strikte ongelijkheid behouden. Uit (11) en (12) volgt dus

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

hetgeen te bewijzen was.