Examen G0U13D Bewijzen en Redeneren II
Bachelor Fysica en Informatica, minor wiskunde

maandag 11 januari 2021, 16:00–19:00

De Nayer GBDN.01.A074 (32 studenten)
(1 student met faciliteiten, 16:00-20:00)

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 3 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je enkel het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Zet je naam op elk blad.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 2 pt (b) 3 pt (c) 5 pt

  Vraag 2: (a) 2 pt (b) 8 pt

  Vraag 3: (a) 4 pt (b) 2 pt (c) 4 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Vraag 3 (op 10)			

Vraag 1 Zij $(a_n)_n$ een begrensde rij van reële getallen. We definiëren een nieuwe rij $(b_n)_n$ door

$$b_n = \min\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

5pt (a) Bewijs dat de rij $(b_n)_n$ convergent is.

5pt (b) Geldt er

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \quad ?$$

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Antwoord 1 (a) We bewijzen dat de rij dalend is en naar onder begrensd.

Bewijs dat $(b_n)_n$ dalend is Kies $n \in \mathbb{N}_0$ willekeurig. Dan is

$$\{a_0, \ldots, a_n\} \subset \{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$$

en dus

$$\min\{a_0, \ldots, a_n\} \geq \min\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}.$$

Dit betekent dat $b_n \geq b_{n+1}$ en we zien dat de rij inderdaad dalend is.

Bewijs dat $(b_n)_n$ naar onder begrensd is

Omdat $(a_n)_n$ een begrensde rij is, is er een getal $M > 0$ met

$$a_n \geq -M$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan is ook

$$b_n = \min\{a_0, \ldots, a_n\} \geq -M.$$

en de rij $(b_n)_n$ is inderdaad naar onder begrensd.

Conclusie: Omdat de rij $(b_n)_n$ dalend en naar onder begrensd is, is ze convergent.

(b) De gelijkheid geldt niet.

Neem bijvoorbeeld de rij $(a_n)_n$ gegeven door $a_0 = 0$ en $a_n = 2021$ voor $n \geq 1$. Dan is $b_n = 0$ voor elke n zodat ook

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Maar anderzijds is

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 2021 \neq 0.$$

Vraag 2

6pt (a) Gebruik de ε-n_0 definitie om te bewijzen dat de rij $(a_n)_n$ gegeven door

$$a_n = \frac{\sqrt{4n^2+2021}}{n+1}.$$

convergent is.

4pt (b) De rij $(b_n)_n$ wordt gegeven door $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ en

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{n}}, \qquad n \geq 1.$$

Laat zien dat de rij $(b_n)_n$ stijgend is. Onderzoek of de rij convergent is. Bewijs uw antwoord.

Antwoord 2 (a) We bewijzen dat de limiet gelijk is aan $L = 2$.

Er geldt

$$|a_n - L| = \left| \frac{\sqrt{4n^2+2021}}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{\sqrt{4n^2+2021} - 2(n+1)}{n+1} \right|.$$

We gebruiken de worteltruc om dit verder te herschrijven tot

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \frac{|(4n^2+2021) - 4(n+1)^2|}{(n+1)(\sqrt{4n^2+2021} + 2(n+1))} \\ &= \frac{|2017 - 8n|}{(n+1)(\sqrt{4n^2+2021} + 2(n+1))}. \end{aligned} \tag{1}$$

Als $n \geq 300$ dan kunnen we de teller van (1) afschateen door

$$|2017 - 8n| = 8n - 2017 \leq 8n$$

en de noemer door

$$(n+1)(\sqrt{4n^2+2021} + 2(n+1)) > n(2n+2n) = 4n^2 > 0.$$

Hieruit volgt

$$|a_n - L| < \frac{8n}{4n^2} = \frac{2}{n} \qquad \text{als } n \geq 300. \tag{2}$$

Na deze voorbereiding is het uiteindelijke ε-n_0 bewijs redelijk kort. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $n_0 = \max\{300, \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil\}$ en kies $n \geq n_0$ willekeurig. Dan is $n \geq 300$ zodat vanwege (2) geldt dat

$$|a_n - L| < \frac{2}{n}.$$

Tevens is $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$ hetgeen betekent dat $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$. De transitiviteit van de ordening leidt dan tot $|a_n - L| < \varepsilon$, en hiermee is bewezen dat de rij $(a_n)_n$ convergent is met limiet gelijk aan $L = 2$.

(b) Er geldt $b_{n+1}^2 = b_n^2 + \frac{1}{n} > b_n^2$ als $n \geq 1$. Omdat b_n en b_{n+1} positief zijn, volgt hieruit dat $b_{n+1} > b_n$ als $n \geq 1$. Ook geldt dat $b_1 = b_0$ vanwege de gegeven beginvoorwaarden. Bijgevolg is de rij $(b_n)_n$ stijgend.

Uit $b_{n+1}^2 = b_n^2 + \frac{1}{n}$ voor $n \geq 1$ en $b_1 = 0$ is het eenvoudig om met volledige inductie aan te tonen dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

$$b_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

We zien hier de partieelsommen van de harmonische reeks waarvan we weten dat ze divergent is. De rij $(b_n^2)_n$ is bijgevolg divergent. Dan is $(b_n)_n$ ook divergent.

Vraag 3

6pt (a) Neem aan dat $A \subset \mathbb{R}$ open, niet-leeg, en naar boven begrensd is. Neem aan dat $B \subset A$ een eindige deelverzameling van A is. Bewijs dat $A \setminus B$ niet-leeg en naar boven begrensd is en dat

$$\sup(A \setminus B) = \sup(A).$$

4pt (b) Neem aan dat $(a_n)_n$ een begrensde rëele rij is en dat $(b_n)_n$ een deelrij van $(a_n)_n$ is. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Antwoord 3 Omdat A niet-leeg is, is er een $x_0 \in A$. Omdat A open is, is x_0 een inwendig punt van A. Er is bijgevolg $r > 0$ met $]x_0 - r, x_0 + r[\subset A$. Dit open interval is een oneindige verzameling. Omdat dit een deel van A is, is A zelf ook een oneindige verzameling. Omdat B eindig is, zal niet elk element van A ook tot B behoren, en bijgevolg is $A \setminus B$ niet-leeg.

Omdat $A \setminus B \subset A$ en A is naar boven begrensd is $A \setminus B$ ook naar boven begrensd. $\sup A$ is namelijk een bovengrens van $A \setminus B$ en bijgevolg geldt

$$\sup(A \setminus B) \leq \sup A.$$

Er resteert ons nog om te bewijzen dat

$$\sup(A \setminus B) \geq \sup A. \tag{3}$$

en dit doen we door te bewijzen dat

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A \setminus B : x > \sup A - \varepsilon. \tag{4}$$

Immers, uit (4) volgt dat voor elke gegeven $\varepsilon > 0$ geldt dat $\sup A - \varepsilon$ geen bovengrens is van $A \setminus B$ en dus $\sup(A \setminus B) > \sup A - \varepsilon$. Omdat $\varepsilon > 0$ hierin willekeurig is, volgt (3).

Om (4) te bewijzen kiezen we $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is $\sup A - \varepsilon$ geen bovengrens van A. Er is dus een $a \in A$ met $a > \sup A - \varepsilon$. Omdat A open is, is er een $r > 0$ met $]a - r, a + r[\subset A$. Dan is $]a, a + r[$ een open interval, dat oneindig veel getallen bevat. Omdat B eindig is, bevat $]a, a + r[$ zeker een element dat niet tot B behoort. Neem zo'n element, zeg $x \in]a, a+r[$ met $x \notin B$. Omdat $]a, a+r[\subset A$ is dan $x \in A$, en dus $x \in A \setminus B$. Tevens is

$$x > a > \sup A - \varepsilon,$$

waarmee (4) bewezen is.

(b) Omdat $(b_n)_n$ een deelrij van $(a_n)_n$ is, bestaat er een strikt stijgende functie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ met

$$b_n = a_{\varphi(n)} \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

We definiëren zoals in de definitie van lim sup, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{a_k \mid k \geq n\}$$
$$B_n = \{b_k \mid k \geq n\},$$

waarvan we weten dat

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup A_n &= \limsup_{n\to\infty} a_n \\ \lim_{n\to\infty} \sup B_n &= \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned} \tag{6}$$

We bewijzen dat $B_n \subset A_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

- Neem $n \in \mathbb{N}$ en kies $x \in B_n$ willekeurig. Dan is er een $k \geq n$ met $x = b_k$. Vanwege (5) is dan $x = a_l$ met $l = \varphi(k)$. Omdat $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt stijgend is, zal $l \geq k$. Dan ook $l \geq n$ en er volgt dat $x = a_l \in A_n$.

Omdat $B_n \subset A_n$ geldt

$$\sup B_n \leq \sup A_n. \tag{7}$$

In de limiet $n \to \infty$ blijft de niet-strikte ongelijkheid behouden. Uit (6) en (7) volgt dus

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

hetgeen te bewijzen was.