Examen G0U13C Bewijzen en Redeneren
Bachelor Fysica

donderdag 16 januari 2020, 9:00–12:00

Auditorium G.00.01 (88 studenten)
Lokaal B.01.14 (5 studenten met faciliteiten, 8:30-12:30)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt

  Vraag 2: (a) 6 pt (b) 4 pt

  Vraag 3: (a) 3 pt (b) 4 pt (c) 3 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 30)			

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A \subset X$ en $B \subset Y$ geldt

$$A \subset f^{-1}(B) \implies f(A) \subset B.$$

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \ f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Met $\mathrm{Fun}(X, Y)$ noteren we de verzameling van alle functies $f : X \to Y$. We definiëren een relatie R op $\mathrm{Fun}(X, Y)$ door te stellen dat $(f, g) \in R$ als en slechts als

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

een **eindige** verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Neem aan dat $X = \mathbb{N}$ en $Y = \{0, 1\}$. Zijn de equivalentieklassen van R dan eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

Naam:

Vraag 3 De getallen a_k met $k \in \mathbb{N}$ worden gegeven door $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ en

$$a_k = 5a_{k-1} - 4a_{k-2} \qquad \text{voor } k \geq 2.$$

(a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat

$$a_{k-1} \leq a_k \leq 4a_{k-1}$$

geldt voor elke $k \geq 1$.

(b) Bereken de voortbrengende functie van de rij (a_k). Laat zien dat dit een rationale functie is. Wat is de teller en wat is de noemer?

(c) Geef de ontkenning van de uitspraak

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall r > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \quad k \geq n \implies |a_k - L| < r$$

over de rij (a_k) zonder de negatie $\neg$ en de implicatie $\implies$ te gebruiken.