

**Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN**

donderdag 16 januari 2020, 9:00–13:00

**Auditorium G.00.06 (73 studenten)
Lokaal B.01.14 (4 studenten met faciliteiten: 8:30-13:50)**

Naam:

Studierichting:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt
Vraag 2: (a) 6 pt (b) 4 pt
Vraag 3: (a) 6 pt (b) 4 pt
Vraag 4: (a) 2 pt (b) 8 pt
Vraag 5: (a) 3 pt (b) 4 pt (c) 3 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 50)	
Vraag 2 (op 10)		L ^A T _E X opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Vraag 5 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 50)			

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie.

- (a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A \subset X$ en $B \subset Y$ geldt

$$A \subset f^{-1}(B) \implies f(A) \subset B.$$

- (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

niet altijd hoeft te gelden.

- (c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Met $\text{Fun}(X, Y)$ noteren we de verzameling van alle functies $f : X \rightarrow Y$. We definiëren een relatie R op $\text{Fun}(X, Y)$ door te stellen dat $(f, g) \in R$ als en slechts als

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

een **eindige** verzameling is.

- (a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.
- (b) Neem aan dat $X = \mathbb{N}$ en $Y = \{0, 1\}$. Zijn de equivalentieklassen van R dan eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

Naam:

Vraag 3 Voor A en B niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ nemen we

$$C = \{\max\{x, y\} \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

- (a) Neem aan dat A en B naar boven begrensd zijn. Bewijs dat dan ook C naar boven begrensd is en dat

$$\sup(C) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

- (b) Neem aan dat A en B open verzamelingen zijn. Is C dan ook open? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de ε - n_0 definitie van convergentie van een reële rij.

(b) Neem aan dat de rij $(a_n)_n$ gegeven wordt door

$$a_n = \begin{cases} e^{n!} & \text{voor } n < 2020, \\ \frac{n^2 + \sin(n)}{5n - 2n^2} & \text{voor } n \geq 2020. \end{cases}$$

Gebruik de ε - n_0 definitie om te bewijzen dat de rij convergent is.

Naam:

Vraag 5 In onderdeel (a) en (b) nemen we aan dat de reële rij $(x_n)_n$ voldoet aan

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n^2}. \quad (1)$$

(a) Bewijs dat

$$|x_m - x_n| \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

geldt voor elke $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Bewijs dat uit (a) volgt dat $(x_n)_n$ een Cauchyrij is.

(c) Als in plaats van (1) geldt dat

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}$$

volgt dan nog steeds dat $(x_n)_n$ een Cauchyrij is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.