Examen G0U13D Bewijzen en Redeneren II
Bachelor Fysica en Informatica, minor wiskunde

donderdag 16 januari 2020, 9:00–12:00

Auditorium G.00.01 (33 studenten)
Lokaal B.01.14 (2 studenten met faciliteiten: 8:30–12:30)

Naam:

Studierichting:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 6 pt (b) 4 pt

  Vraag 2: (a) 2 pt (b) 8 pt

  Vraag 3: (a) 3 pt (b) 4 pt (c) 3 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Vraag 3 (op 10)			

Naam:

Vraag 1 Voor A en B niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ nemen we

$$C = \{\max\{x, y\} \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

(a) Neem aan dat A en B naar boven begrensd zijn. Bewijs dat dan ook C naar boven begrensd is en dat

$$\sup(C) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

(b) Neem aan dat A en B open verzamelingen zijn. Is C dan ook open? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Naam:

Vraag 2 (a) Geef de ε-n_0 definitie van convergentie van een reële rij.

(b) Neem aan dat de rij $(a_n)_n$ gegeven wordt door

$$a_n = \begin{cases} e^{n!} & \text{voor } n < 2020, \\ \dfrac{n^2 + \sin(n)}{5n - 2n^2} & \text{voor } n \geq 2020. \end{cases}$$

Gebruik de ε-n_0 definitie om te bewijzen dat de rij convergent is.

Naam:

Vraag 3 In onderdeel (a) en (b) nemen we aan dat de reële rij $(x_n)_n$ voldoet aan

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

(a) Bewijs dat

$$|x_m - x_n| \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

geldt voor elke $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Bewijs dat uit (a) volgt dat $(x_n)_n$ een Cauchyrij is.

(c) Als in plaats van (1) geldt dat

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}$$

volgt dan nog steeds dat $(x_n)_n$ een Cauchyrij is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.