Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

donderdag 1 februari 2018, 8:30–12:30

Auditorium G.00.06 (50 studenten)

B.01.05 (1 student met faciliteiten)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 50)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Vraag 5 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 50)			

Naam:

Vraag 1 (a) Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij $(x_n)_n$ van reële getallen:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : [n \geq 2018 \implies \exists k \in \mathbb{N} : x_k > x_n + \varepsilon]$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

(b) X is een eindige verzameling met $|X| = n$ en n is een oneven getal.
Hoeveel surjectieve functies $f : X \to \{0, 1\}$ zijn er met de eigenschap dat

$$\left|f^{-1}(0)\right| < \left|f^{-1}(1)\right| \quad ?$$

Geef een expliciete uitdrukking en motiveer uw antwoord.

(c) Bewijs met volledige inductie dat

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen A en B van Y geldt dat

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \quad \Longrightarrow \quad A \subset B \tag{1}$$

niet hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat de implicatie (1) voor alle $A \in P(Y)$ en $B \in P(Y)$ geldt als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 3 X en Y zijn twee verzamelingen. We noteren met $\mathrm{Fun}(X,Y)$ de verzameling van alle functies $f : X \to Y$. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X,Y)$ gegeven door

$$(f,g) \in R$$

als en slechts als er een bijectieve functie $\sigma : Y \to Y$ bestaat met $\sigma \circ f = g$.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Hoeveel equivalentieklassen heeft R als $|X| = 3$ en $|Y| = 2$?

(c) Neem aan dat X aftelbaar oneindig is en dat Y eindig is.

Hoe groot zijn de equivalentieklassen van R? Zijn ze eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar?

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Gebruik de definitie om te bewijzen dat de rij $(a_n)_n$ waarbij

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 + \sin n}}{3n + 1}$$

convergent is.

Naam:

Vraag 5 Gegeven is dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voldoet aan

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - a_n), \qquad \text{voor } n \geq 1. \tag{2}$$

(a) Bewijs dat de rij een Cauchyrij is.

(b) Beargumenteer dat $(a_n)_n$ convergent is en bepaal de limiet als $a_0 = 0$ en $a_1 = 1$.

Mogelijke hint: Herschrijf (2) tot $\quad 2a_{n+1} + a_n = 2a_n + a_{n-1}$,
maar je mag het ook anders doen...