**Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren, 3sp variant**
**Bachelor Fysica**

**vrijdag 1 september 2017, 14:00–17:00**

**Auditorium L.00.06 (40 studenten)**

**4 studenten met faciliteiten: 14:00–18:00**

**Naam:**

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt

  Vraag 2: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 2 pt (d) 3 pt

  Vraag 3: (a) 4 pt (b) 6 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Vraag 1 (op 10) | | Totaal (op 30) | |
| Vraag 2 (op 10) | | LaTeX opdracht (op 20) | |
| Vraag 3 (op 10) | | | |
| Totaal (op 30) | | EINDCIJFER | |

**Naam:**

**Vraag 1** Zij $X$ en $Y$ niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A$ van $X$ en $B$ van $Y$ geldt

$$A \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(A) \cap B).$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere inclusie

$$f^{-1}(f(A) \cap B) \subset A \cap f^{-1}(B)$$

niet altijd geldt.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \ f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$$

geldt als en slechts als $f$ injectief is.

**Naam:**

**Vraag 2** Beschouw de relatie $R$ op de verzameling $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \ldots\}$ die gegeven wordt door $(x, y) \in R$ als en slecht als $xy = m^2$ voor een zekere $m \in \mathbb{N}$.

(a) Toon aan dat $R$ een equivalentierelatie is.

(b) Geef 3 elementen uit de equivalentieklasse [18].

(c) Is het aantal elementen in [18] eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

(d) Is het aantal equivalentieklassen eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

**Naam:**

**Vraag 3** (a) Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij $(a_n)$ van reële getallen

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : a_n > 1 \implies [\forall m > n : |a_n - a_m| > \varepsilon]$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

(b) Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.